Apostila de Nivelamento

PET CIVIL
ufscar

PET ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/

PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

O PET CIVIL UFSCar

O Programa de Educação Tutorial da Engenharia Civil da UFSCar, visa propiciar ao curso o desenvolvimento de atividades complementares, com enfoque inovador e sistêmico das diversas áreas da Engenharia Civil, considerando os impactos ambientais e sociais decorrentes, preparando profissionais para os desafios da vida contemporânea. Busca-se uma formação multidisciplinar, ampla e diversificada ao extrapolar os conteúdos formais do curso.

O PET Civil iniciou suas atividades em março de 2013, tornando-se um dos primeiros no estado de São Paulo na área da Engenharia Civil, tendo como filosofia e objetivos o tripé: pesquisa, ensino e extensão. O programa, em geral, busca oferecer uma melhoria do ensino de graduação, a formação acadêmica ampla do aluno, uma diversificação das atividades acadêmicas, a interdisciplinaridade e a atuação coletiva.

Com isso, seguindo a área de ensino do tripé do programa, o grupo oferece esta apostila de nivelamento para auxiliar os novos membros da graduação nas aulas e também para servir como material didático de consulta sempre que precisar relembrar algum assunto.

Assuntos Abordados

A apostila foi dividida em três eixos de aprendizagem, sendo:

Pré-Cálculo

Geometria Analítica

Cálculo

Cada um desses capítulos abordarão tópicos importantes que o compõem, aproveite.

Sumário

Rod. Washington Luiz (SP-310)
km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589

1. PRÉ CÁLCULO

Nesse primeiro capítulo, serão abordados os principais tópicos de funções, inequações, fatoração, módulo e logaritmo para que você possa aplicá-la ao longo do curso, já que são a base de tudo!

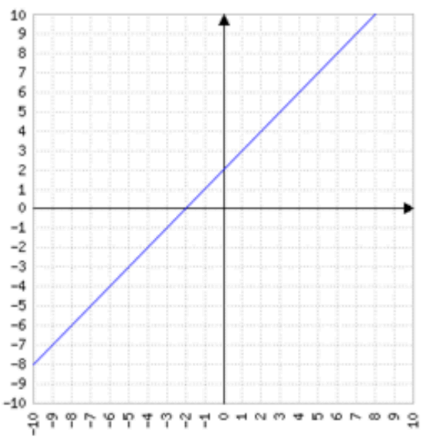
1.1 Funções

1.1.1 Funções Contínuas

Funções contínuas são as funções que não possuem "quebras" ou "saltos". Grosseiramente, pode-se afirmar que uma função é contínua quando conseguimos traçar o gráfico da função sem retirar o lápis do papel.

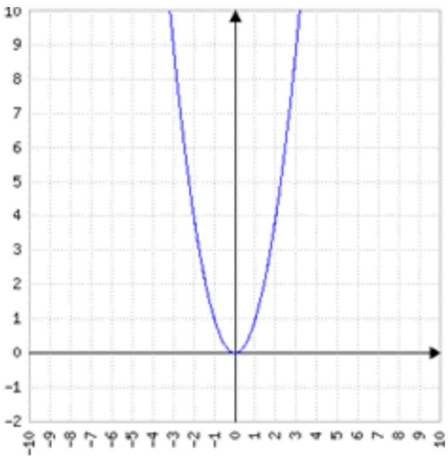
Exemplos:

A. $f(x) = x + 2$



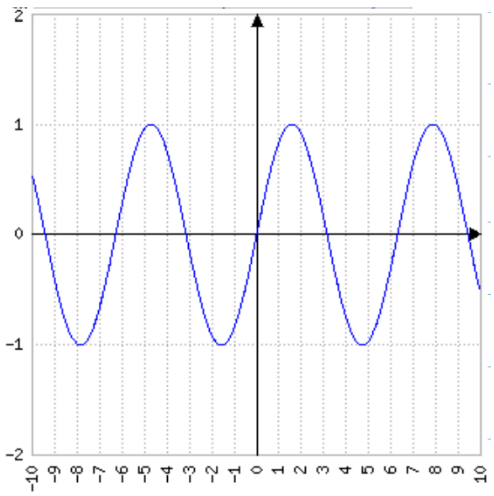
Portanto $f(x) = x + 2$ é uma função contínua.

B. $f(x) = x^2$



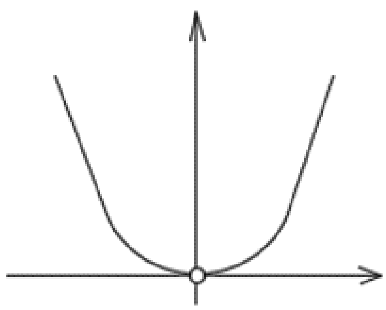
Portanto $f(x) = x^2$ é uma função contínua.

C. $f(x) = sen(x)$



Portanto $f(x) = sen(x)$ é uma função contínua.

D. $f(x) = \{1,\ x = 0;\ x^2,\ caso\ x\neq 0\}$

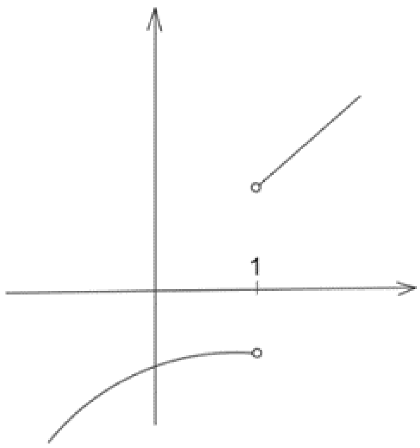


Portanto

$f(x) = \{1,\ x = 0;\ x^2,\ caso\ x\neq 0\}$

não é uma função contínua.

E. $f(x) = \{2x,\ x > 1;\ \ -x^2 - 3,\ caso\ x < 1\}$



Portanto

$f(x) = \{2x,\ x > 1;\ \ -x^2 - 3,\ caso\ x < 1\}$

não é uma função contína

1.1.2 Funções Polinomiais

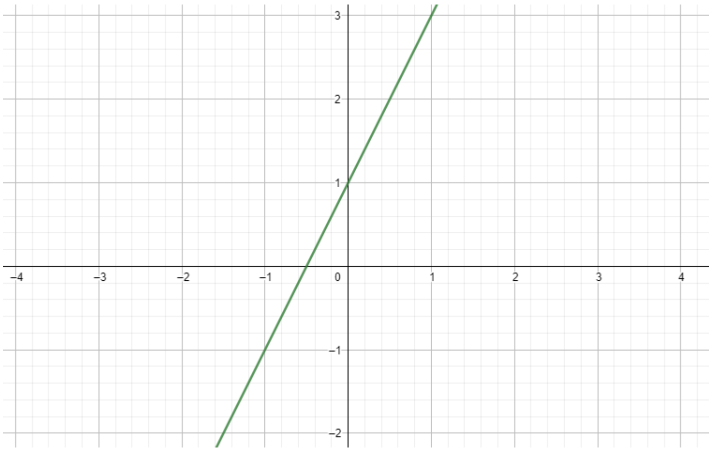
As funções polinomiais são funções contínuas e são definidas por expressões polinomiais. Elas são representadas pela expressão:

$$f(x) = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + a_{n-2} x_{n-2} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 x_0$$

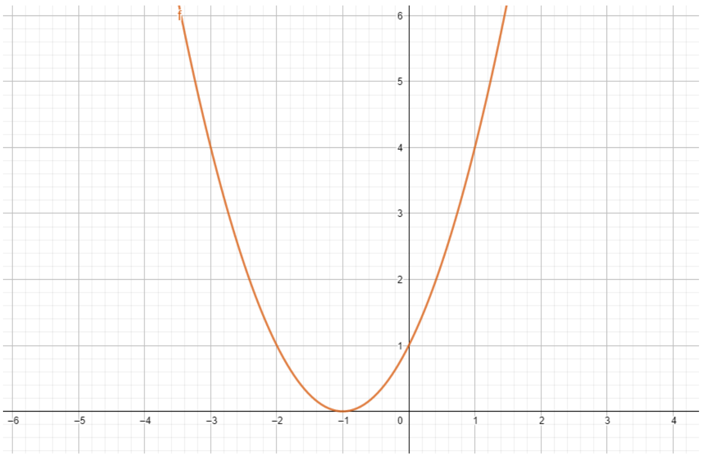
Onde a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, … , a_1 e a_0 são as constantes que chamamos de coeficientes do polinômio e x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, … , x_1 e x_0 são as variáveis da função. Cada função polinomial associa-se a um único polinômio, sendo assim chamamos as funções polinomiais também de polinômios.

Exemplos de funções polinomiais:

A. $f(x) = 2x + 1$



B. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

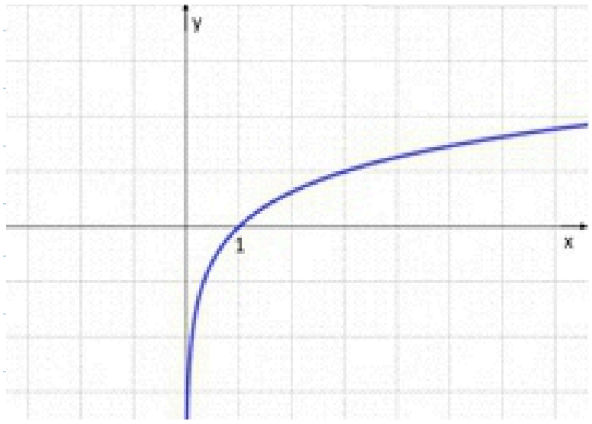


1.1.3 Funções Logarítmicas

A função logarítmica de base a é definida como $log_a x$ com a real, positivo e $a \neq 1$. A função inversa da função logarítmica é a função exponencial. O logaritmo de um número é definido como o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Questões advindas do processo de como calcular

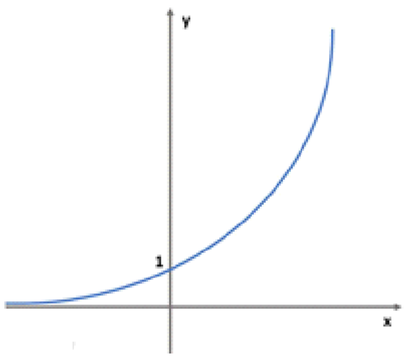
ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

serão vistas no Capítulo 1.5 - Logaritmos. Seu gráfico apresenta o seguinte formato:

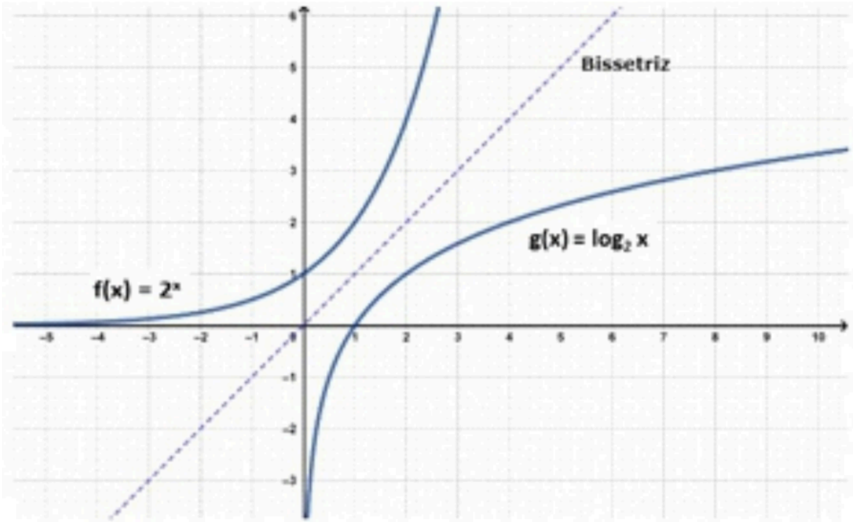


1.1.4 Funções Exponenciais

Função Exponencial é aquela que a variável está no expoente e cuja base é sempre maior que zero e diferente de um. Essas restrições são necessárias, pois 1 elevado a qualquer número resulta em 1. Assim, em vez de exponencial, estaríamos diante de uma função constante. Além disso, a base não pode ser negativa, nem igual a zero, pois para alguns expoentes a função não estaria definida, de forma que a função exponencial apresenta o seguinte gráfico:



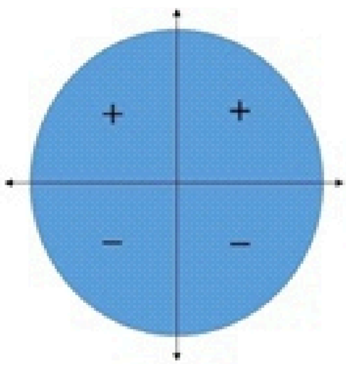
Vale ressaltar que exponencial é a inversa da função logarítmica, de forma que, conhecendo o gráfico da função exponencial de mesma base, por simetria podemos construir o gráfico da função logarítmica.



1.1.5 Funções Trigonométricas (ou Funções Circulares)

Funções Trigonométricas são relacionadas com as demais voltas do círculo trigonométrico. As principais funções trigonométricas são: seno, cosseno e tangente.

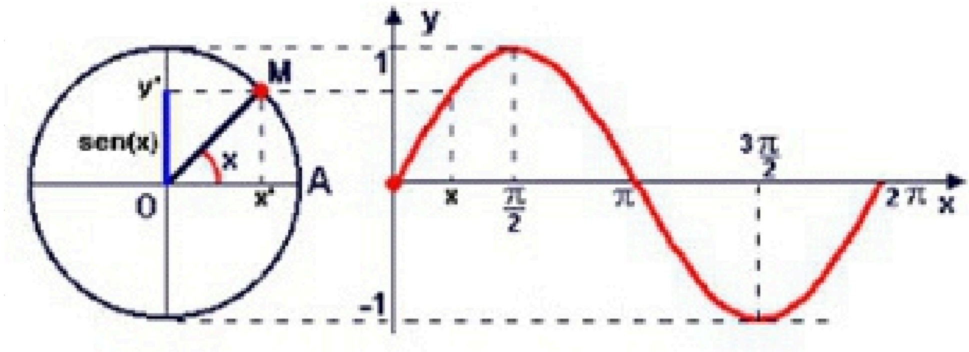
-> Seno: é uma função periódica e seu período é 2π. Ela é expressa por: $f(x) = sen(x)$. No círculo trigonométrico, o sinal da função seno é positivo quando x pertence ao primeiro e segundo quadrantes; e no terceiro e quarto quadrantes o sinal é negativo.



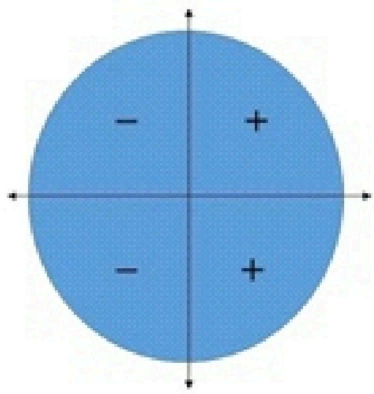
Além disso, no primeiro e quarto quadrantes a função f é crescente. Já no segundo e terceiro quadrantes, a função f é decrescente. O domínio e o contradomínio da função seno está definido para todos os valores reais. Em

PET ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

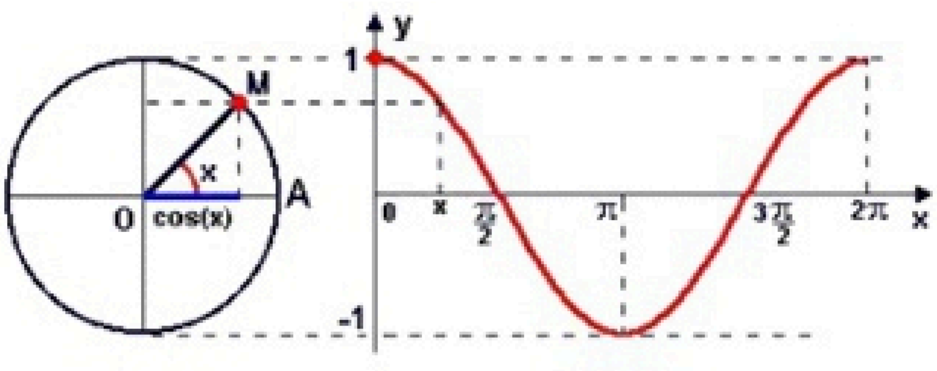
relação à simetria, a função seno é uma função ímpar, de forma que: $sen(-\ x) = \ -\ sen(x)$. O gráfico da função seno $f(x) = sen(x)$ é uma curva chamada de senoide:



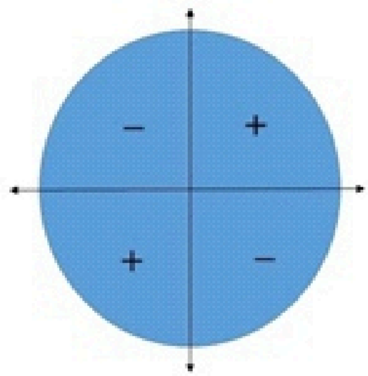
-> Cosseno: é uma função periódica e seu período é 2π. Ela é expressa por: $f(x) = cos(x)$. No círculo trigonométrico, o sinal da função cosseno é positivo quando x pertence ao primeiro e quarto quadrantes; e no segundo e terceiro quadrantes o sinal é negativo.



Além disso, no primeiro e segundo quadrantes a função f é decrescente. Já no terceiro e quarto quadrantes, a função f é crescente. O domínio e o contradomínio da função cosseno está definido para todos os valores reais. Em relação à simetria, a função seno é uma função par: $cos(-\ x) = cos(x)$. O gráfico da função cosseno $f(x) = cos(x)$ é uma curva chamada de cossenoide:

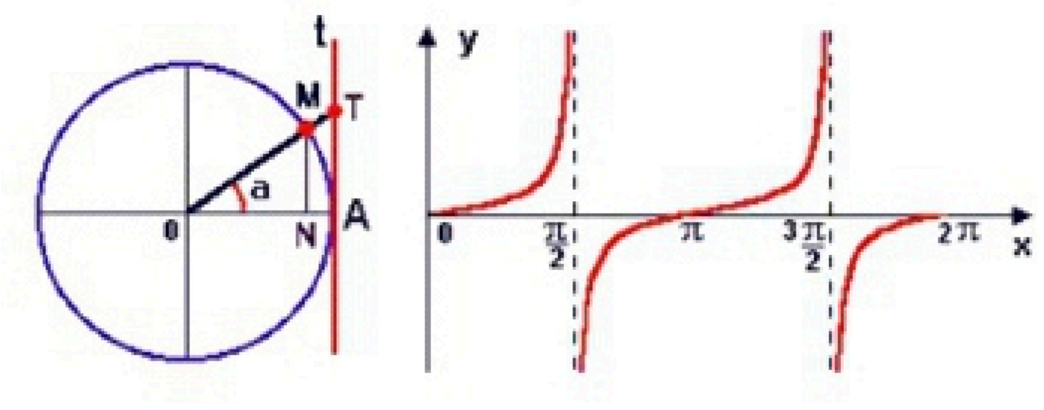


-> Tangente: A função tangente é uma função periódica e seu período é π. Ela é expressa por: $f(x) = tg(x)$. No círculo trigonométrico, o sinal da função tangente é positivo quando x pertence ao primeiro e terceiro quadrantes. Já no segundo e quarto quadrantes, o sinal é negativo.



Além disso, a função f definida por $f(x) = tg(x)$ é sempre crescente em todos os quadrantes do círculo trigonométrico. O domínio da função tangente é $Dom\ (tg(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq de\ \frac{\pi}{2}\ +\ k\pi;\ k \in Z\}$. Em relação à simetria, a função tangente é uma função ímpar, de forma que: $tg(-\ x) = \ -\ tg(x)$. O gráfico da função tangente $f(x) = tg(x)$ é uma curva chamada de tangentóide:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589



1.2 Inequações

Equações são expressões matemáticas que possuem uma ou mais variáveis e um sinal de igualdade (=), já as inequações, possuem um sinal de desigualdade, podendo ser: < (menor que) e > (maior que), podendo também estarem acompanhadas do sinal de igualdade, sendo: ≤ (menor ou igual a) e ≥ (maior ou igual a).

Dica: Toda vez que multiplicamos a desigualdade por (−1) temos que inverter o sinal da desigualdade.

Exemplos:

a) $2x - 4 > 6$

$2x > 6 + 4$

$2x > 10$

$x > \frac{10}{2}$

$x > 5$

$S = \{x \in R \,/\, x > 5\}$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

b) $x^2 - 2x - 8 < 0$

Primeiro, são necessárias as raízes da equação do segundo grau, para depois estudar o sinal. Para análise dos sinais, será preciso montar um gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 8$, resolvendo a equação do segundo grau através de Bháskara:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Aplicando Bháskara:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)$$

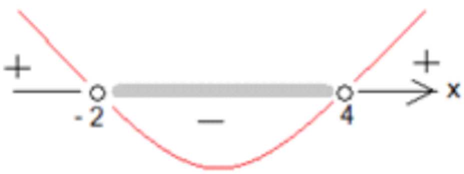
$$\Delta = 36$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2*1}$$

$$x_1 = -2 \quad e \quad x_2 = 4$$

Graficamente:



Nesse caso o termo x^2 é positivo, portanto, o gráfico terá a concavidade voltada para cima. A solução para a inequação é

$$S = \{x \in R / -2 < x < 4\}$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

c) $2x^2 - 2x + 5 < 0$

Como realizado no exercício anterior, iremos encontrar as raízes da função, através de Bhaskara.

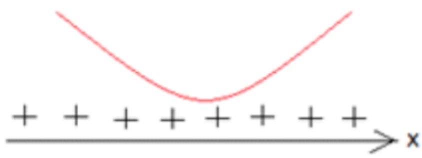
$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\Delta = -36$$

Como o Δ resultou em um número negativo, podemos dizer que x_1 e x_2 não pertencem aos números reais.

Graficamente:



Apesar das raízes não pertencerem aos números reais, pelo gráfico percebemos que a solução será:

$$S = R$$

1.2.1 Inequações Simultâneas

Inequações simultâneas acontecem quando é necessário satisfazer mais de uma inequação.

Exemplos:

a) $3x - 4 > 0$ e $-x + 4 \geq 0$

Primeiramente, resolvendo separadamente:

Rod. Washington Luiz (SP-310) km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589

$3x - 4 > 0$

$3x > 4$

$x > \frac{4}{3}$

$-x + 4 \geq 0$

$-x \geq -4$

$x \leq 4$

Fazendo a intersecção de ambas as soluções das equações, teremos:

A solução será:

$S = \{x \in \Re / \frac{4}{3} < x \leq 4\}$

b) $3x - 2 > 4x + 1$ e $5x + 1 \leq 2x - 5$

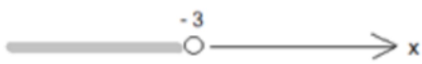
Primeiramente, resolvendo separadamente:

$3x - 2 > 4x + 1$

$3x - 4x > 1 + 2$

$-x > 3$

$x < -3$



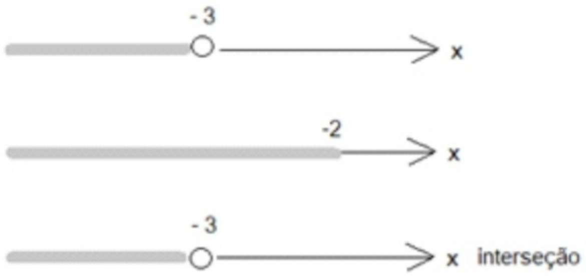
$5x + 1 \leq 2x - 5$

$5x - 2x \leq -5 - 1$

$3x \leq -6$

$x \leq -2$

Para saber a solução geral é preciso fazer a intersecção das soluções de cada inequação:



Com isso, temos que a solução será:

$S = \{x \in R \,/\, x < -3\}$

c) $-3 < x + 2 \leq 5$

Subtraindo 2 de cada parte da inequação, teremos:

$-3 - 2 < x + 2 - 2 \leq 5 - 2$

$-5 < x \leq 3$

Com isso, a solução será:

$S = \{x \in R \,/\, -5 < x \leq 3\}$

d) $-2x + 3 \leq x + 6 < 2x$

Resolvendo separadamente cada uma das duas partes:

$-2x + 3 \leq x + 6$

$-2x - x \leq 6 - 3$

$-3x \leq 3$

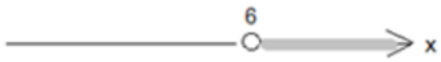
$-x \leq 1$

$x \geq -1$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

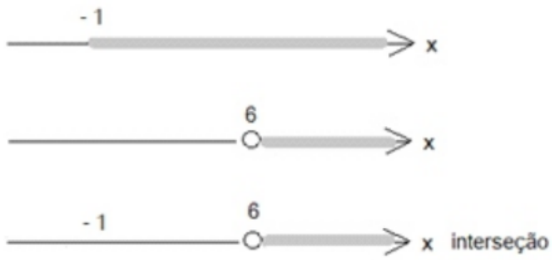
$x + 6 < 2x$

$6 < 2x - x$



$x > 6$

Para sabermos a solução geral, faremos a intersecção das soluções separadas:



Com isso, temos que a solução será:

$S = \{x \in R \,/\, x > 6\}$

e) $-8 \leq x^2 - 2x - 8 \leq 0$

Resolvendo separadamente cada uma das duas partes:

$x^2 - 2x - 8 + 8 \geq 0$

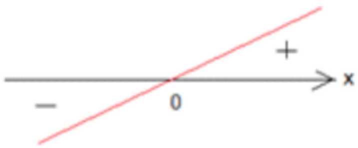
$x^2 - 2x \geq 0$

$x(x - 2) \geq 0$

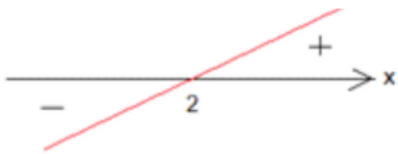
O caso desse exercício é um caso de inequação produto, próximo item desta apostila. Para introdução vamos resolvê-lo pensando em analisar duas funções de modo separado (primeiramente $f(x) = x$ e, em seguida, $g(x) = (x - 2)$.

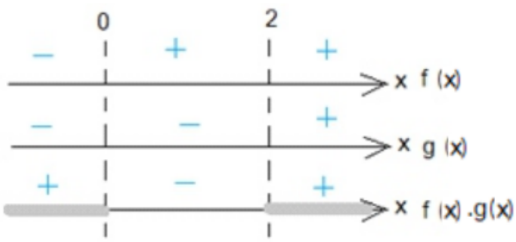
A seguir estão os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$.

$f(x)$:



$g(x)$:





A segunda parte desenvolvida, resulta:

$x^2 - 2x - 8 \leq 0$

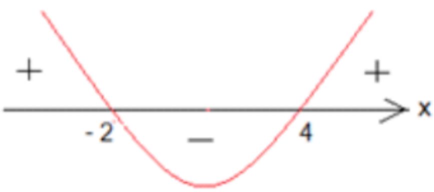
Raízes da função:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$

$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2*1}$

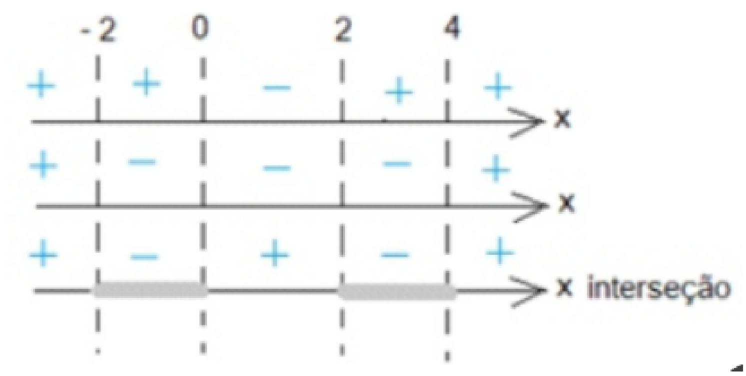
$x = \frac{(2 \pm 6)}{2}$

$x_1 = -2$ e $x_2 = 4$



Para saber a solução geral é preciso fazer a intersecção das respostas:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589



Com isso, temos que:

$S = \{x \in R / -2 < x < 0 \; ou \; 2 < x < 4\}$

1.2.2 Inequação Produto

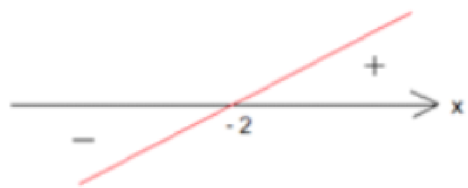
Nesse caso é necessário avaliar produtos de funções junto com desigualdades. Além disso, o sinal é um fator muito importante, por isso, é bom ficar atento ao mesmo.

Exemplos:

a) $(x + 2)(2x - 1) > 0$

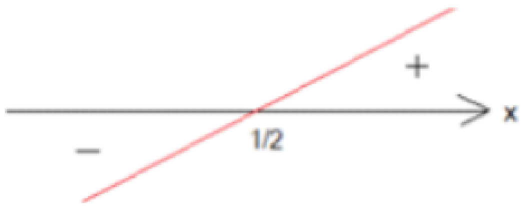
Considerando $f(x)$ a função $x + 2$ e $g(x)$ de $2x - 1$, temos que:

- Raiz de $f(x)$: $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$ (coeficiente angular positivo → função crescente)

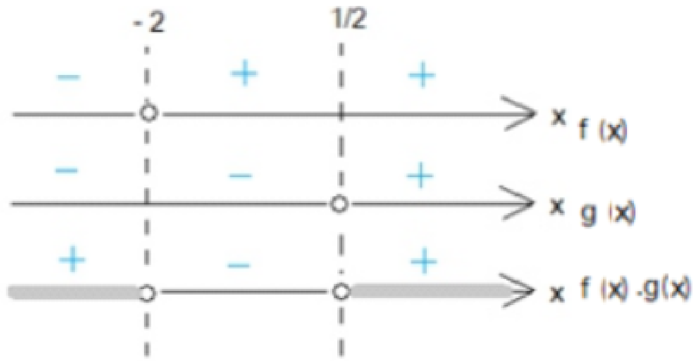


- Raiz de $g(x)$: $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ (coeficiente angular positivo → função crescente)

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589



Análise de sinal para $f(x)$ e $g(x)$ em cada intervalo:



Com isso, temos que a solução é

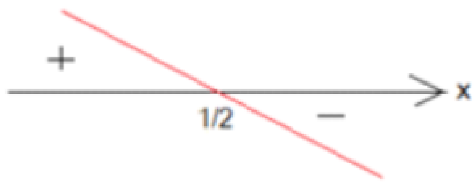
$$S = \{x \in R \,/\, x <- 2 \; ou \; x < \frac{1}{2}\}$$

b) $\frac{(1-2x)(3+4x)}{(4-x)} > 0$

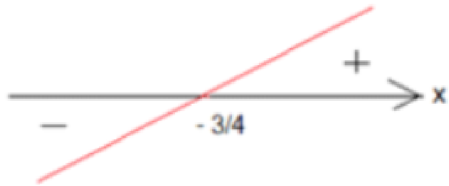
Condição de existência: $4 - x$ deve ser diferente de zero. Dessa forma, $x \neq 4$.

Considerando $1 - 2x$ como $f(x)$, $3 + 4x$ como $g(x)$ e $4 - x$ de $h(x)$, temos que:

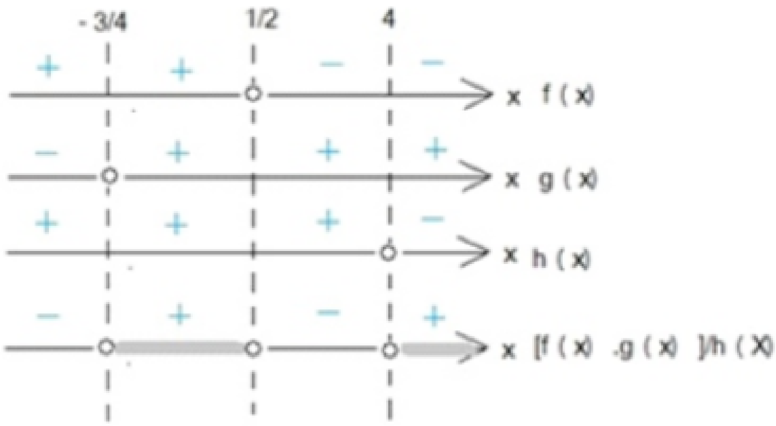
- Raiz de $f(x)$: $1 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ (coeficiente angular negativo → função decrescente)



- Raiz de $g(x)$: $3 + 4x = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{4}$ (coeficiente angular positivo → função crescente)



Análise de sinal para $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ em cada intervalo:



Com isso, temos que:

$S = \{x \in R\, /\, \frac{-3}{4} < x < 1\ ou\ x < 4\}$

c) $\frac{(-x+2)}{(x^2-4x-5)} > 0$

Condição de existência: $x^2 - 4x - 5$ deve ser diferente de zero.

Raízes da função:

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36$

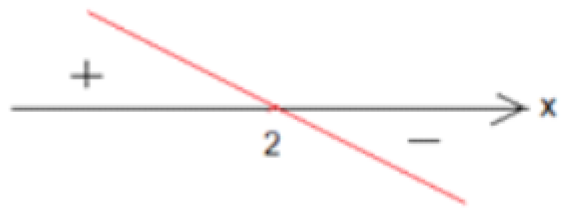
$x = \frac{-(-4) \pm\sqrt{36}}{2*1}$

$x_1 =- 1$ e $x_2 = 5$

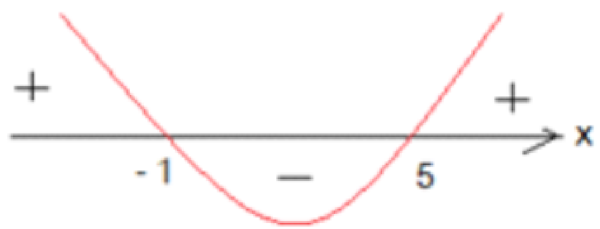
Portanto, x deve ser diferente de -1 e 5

Considerando $- x + 2$ como $f(x)$ e $x^2 - 4x - 5$ como $g(x)$, temos que:

- Raiz de $f(x)$: $- x + 2 = 0 \rightarrow x = 2$

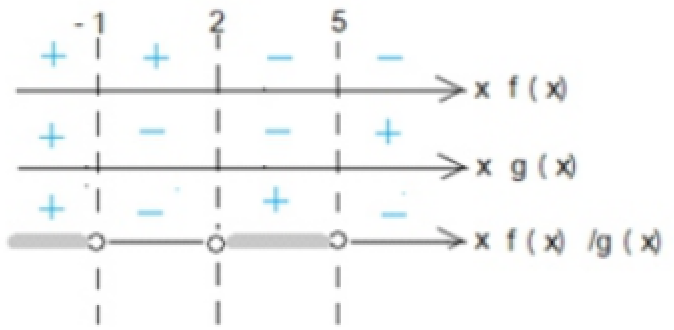


- Raiz de $g(x)$: Como já foi calculado na condição de existência as raízes da função $g(x)$ são -1 e 5.



Rod. Washington Luiz (SP-310)
km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589

Análise de sinal para $f(x)$ e $g(x)$ em cada intervalo:



Com isso, temos que:

$S = \{x \in R \,/\, x < -1 \; ou \; 2 < x < 5\}$

1.3 Fatoração

Fatoração é um processo matemático que consiste na representação de um número ou uma expressão de uma forma diferente, como produto de fatores, buscando simplificar equações e expressões algébricas.

1.3.1 Fator Comum

Esta é a forma de fatoração em que se isola o termo em comum da soma algébrica, transformando-a em um produto, conforme esquematizado abaixo:

$$a \,.\, c + a \,.\, d = a \,.\, (c + d)$$

Nesse caso, “a” é o fator comum da expressão “a . c + a . d”, que no lado direito da igualdade, foi colocado em evidência, resultando na expressão “a . (c + d)”.

Exemplos:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

a) $4x + 4y = 4 . (x + y)$

Neste exemplo, o fator comum é o 4 e, portanto, ao lado direito da igualdade ele está em evidência.

b) Fatore a expressão: $36x^2y^2 - 48x^3y^4$.

Primeiramente, podemos decompor os valores 36 e 48 em relação ao seu máximo divisor comum, que é o 12, de modo que a equação passa a ter a seguinte forma:

$$(12 . 3)x^2y^2 - (12 . 4)x^3y^4$$

Em relação ao "x", como esse aparece nos dois termos, pegamos sua potência com menor expoente, nesse caso, o "x^2". Fazemos o mesmo com o "y", pegando o "y^2" que é a potência com menor expoente. Com isso, construímos o primeiro fator da nossa nova expressão, sendo esse, o fator comum nos dois termos "$12x^2y^2$".

Para construir o segundo fator da nossa nova expressão, dividimos cada um dos termos da equação original pelo fator comum encontrado:

$$\frac{36x^2y^2}{12x^2y^2} = 3 \text{ e } \frac{48x^3y^4}{12x^2y^2} = 4xy^2$$

Cabe lembrar que ao realizar uma operação de divisão de potências de mesma base, mantemos a base e subtraímos o expoente. Dessa forma, a fatoração resulta na expressão direita à igualdade:

$$36x^2y^2 - 48x^3y^4 = 12x^2y^2(3 - 4xy^2)$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

1.3.2 Fatoração por Agrupamento

Esse tipo de fatoração é utilizado quando não há um termo em comum na expressão analisada, sendo geralmente aplicado quando há um número par de termos na expressão original. A ideia, é buscar fazer a fatoração por fator comum em grupos separados, visando verificar se aparecem termos comuns na expressão completa para dar sequência ao processo, conforme exemplificado abaixo:

$$a\,.\,c + b\,.\,c + a\,.\,d + b\,.\,d = c(a + b) + d(a + b) = (c + d)\,.\,(a + b)$$

Exemplos:

a) Fatore a expressão: $xy - 3x + 2y - 6$.

Nesse caso, não é possível encontrar um fator pelo qual possamos dividir todos os termos, então, tentaremos aplicar a fatoração por agrupamento, agrupando os termos de dois em dois para procurar fatores comuns:

$$\underline{xy - 3x} + \underline{2y - 6}$$

Analisando dessa forma, em "$xy - 3x$", o fator comum é o "x". Já para "$2y - 6$", o fator comum é o 2. Colocando esses fatores em evidência, chegamos em $x(y - 3) + 2(y - 3)$, e com isso, obtemos "$(y - 3)$" como um novo fator comum, que ao ser evidenciado resulta na equação $(x + 2)(y - 3)$.

b) Fatore a expressão: $6x^2 - 4ax - 9bx + 6ab$.

Como não é possível achar um fator pelo qual possamos dividir todos os termos, iremos agrupar os termos separadamente e procurar fatores comuns:

$$\underline{6x^2 - 4ax}\ \ \underline{- 9bx + 6ab}$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Para o primeiro grupo, temos 2, como o máximo divisor comum entre 6 e 4, e “x”, como o fator comum. Portanto, podemos colocar “2x” em evidência. Para construir o segundo fator, faremos a divisão dos termos originais ($6x^2$ - 4ax) pelo primeiro termo da nova equação (2x):

$$\frac{6x^2 - 4ax}{2x} = 3x - 2a$$

No segundo grupo, temos 3 como máximo divisor comum entre 9 e 6 e “b” como fator comum. Seguindo o mesmo passo a passo feito com o primeiro grupo, colocamos “3b” em evidência e fazemos a divisão dos termos originais pelo primeiro termo da nova equação para obter o segundo termo:

$$\frac{-9bx+6ab}{3b} =- 3x + 2a$$

Para ficarmos com dois termos iguais, $(3x - 2a)$, multiplicamos $(- 3x + 2a)$ por -1. Logo, ficamos com $- 3b(3x - 2a)$.

Sendo assim, chegamos na seguinte igualdade: $6x^2 - 4ax - 9bx + 6ab = 2x(3x - 2a) - 3b(3x - 2a)$.

Dessa forma, como $(3x - 2a)$ aparece nos dois termos, podemos colocá-lo em evidência, chegando ao resultado:

$$(2x - 3b)(3x - 2a)$$

1.3.3 Diferença de quadrados

Nessa forma de fatoração, utiliza-se o conceito de que “a diferença entre dois quadrados equivale ao produto da soma pela diferença destes dois termos”, ou seja:

$$a^2 - b^2 = (a + b) . (a - b)$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Exemplos:

a) Fatore a expressão: $a^2 - 16$.

Extraindo a raiz de cada um dos termos, obtemos:

$$\sqrt{a^2} - \sqrt{16} = a - 4$$

Com essa informação, podemos indicar a expressão como o produto da soma pela diferença das raízes encontradas, de forma que:

$$a^2 - 16 = (a + 4)(a - 4)$$

b) Simplifique a expressão numérica: $123456^2 - 123455^2$.

Como os dois termos são potências elevadas ao quadrado, concluímos que a expressão é uma diferença de quadrados, em que, seguindo a definição, 123456 seria o termo “a” e 123455 o termo “b”. Sendo assim, temos:

$$123456^2 - 123455^2 = (123456 + 123455) . (123456 - 123455)$$

Resolvendo as operações em cada termo:

$$(123456 + 123455) . (123456 - 123455) = (246911) . (1)$$

Logo: $123456^2 - 123455^2 = 246911$

1.3.4 Trinômio Quadrado Perfeito (TQP)

Uma expressão algébrica (que não pode ser reduzida) formada por três parcelas é denominada trinômio.

Quando precisamos fatorar um trinômio, o primeiro passo é verificar se ele é um trinômio quadrado perfeito, isto é, se ele provém do **produto notável** do

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

quadrado da soma ou do quadrado da diferença, devendo seguir um dos diferentes formatos:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \text{ou} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Devemos verificar ainda, se a equação satisfaz duas condições:

I) Dois termos do trinômio são quadrados perfeitos e precedidos do sinal "+";

II) O outro termo, precedido do sinal "+" ou do sinal "-", é igual ao dobro do produto das raízes dos termos quadrados.

Exemplos:

a) Fatore a expressão: $x^2 + 8x + 16$.

Avaliando a primeira condição:

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{16} = x + 4$$

Com a primeira condição satisfeita, avaliamos a segunda condição:

$$8x = (2 \,.\, 4 \,.\, x)$$

Como a segunda condição também está satisfeita, temos um trinômio do quadrado perfeito, e assim, podemos aplicar a fatoração:

$$x^2 + 8x + 4^2 = (x + 4)^2$$

b) Fatore a expressão: $9x^2 - 30xy + 25y^2$.

Seguindo o passo a passo utilizado no exemplo anterior, avaliaremos as duas condições necessárias.

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Avaliando a primeira condição:

$$\sqrt{9x^2} + \sqrt{25y^2} = 3x + 5y$$

Avaliando a segunda condição:

$$-\ 30xy = (2\ .\ 3x\ .\ 5y)$$

Com as duas condições satisfeitas, podemos fatorar:

$$9x^2 - 30xy + 25y^2 = (3x - 5y)^2$$

É importante observar que como o termo "30xy" é negativo, temos o quadrado da diferença de dois termos.

c) **Fatore a expressão:** $16x^2 + 10x + y^2$.

Avaliando a primeira condição:

$$\sqrt{16x^2} + \sqrt{y^2} = 4x + y$$

Avaliando a segunda condição:

$$10xy \neq (2\ .\ 4x\ .\ y)$$

Logo, este não é um caso de trinômio do quadrado perfeito e não podemos utilizar essa técnica de fatoração.

1.3.5 Trinômio Soma e Produto

A técnica de fatoração do tipo "$x^2 - Sx + P$" é muito útil para resolver problemas envolvendo funções polinomiais do 2º grau, sendo uma alternativa para a tradicional fórmula de Bhaskara.

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

No trinômio do tipo “$x^2 - Sx + P$”, os termos indicam:

S = soma das raízes;

P = produto das raízes.

Para realizar esse tipo de fatoração, precisamos encontrar dois números tais que a soma equivale a “S” e o produto equivale a “P”. Estes números são as raízes de um polinômio do segundo grau e são chamados de x’ e x” (ou x_1 e x_2). Portanto:

$$S = x' + x'' \text{ e } P = x' . x''$$

Com estes valores, podemos realizar a fatoração da seguinte forma:

$$x^2 - Sx + P = (x - x') . (x - x'')$$

Exemplo:

a) Fatore a expressão: $x^2 - 12x + 20.$

Ao analisar as condições exigidas para que este seja um trinômio do quadrado perfeito, pode-se observar que esta expressão não se encaixa nesse caso. Logo, optaremos pela fatoração do tipo estudado nesse tópico, por soma (S) e produto (P).

Dessa forma, precisamos encontrar dois números, tais que S seja igual a 12 e P seja igual a 20.

Como o produto é positivo, ambas as raízes a serem encontradas, devem ter sinais iguais, e como a soma é negativa, podemos concluir que os números buscados são negativos

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Assim, ao fazer a decomposição do número 20 e buscando encontrar as alternativas possíveis para a soma, concluímos que as raízes são os números 2 e 10.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$S =- 2 - 10 = 12$$

$$P = (- 2) . (- 10) = 20$$

Mediante a isso, obtemos a seguinte fatoração:

$$x^2 - 12x + 20 = (x - 10) . (x - 2)$$

1.3.6 Soma ou diferença entre cubos

Para essa forma de fatoração é necessário o uso dos seguintes **produtos notáveis:**

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Exemplo: Fatore a expressão: $27x^3 + 1$

Primeiro, deve-se obter a raíz cúbica de ambos os termos:

$$\sqrt[3]{27x^3} + \sqrt[3]{1} = 3x + 1$$

Após isso, é possível notar que o “3x” é igual ao “a” da definição abordada anteriormente e o “1” é igual ao “b”. Desse modo, a fatoração fica expressa abaixo.

$$(3x)^3 + 1^3 = (3x + 1)((3x)^2 - 3x + 1^2) = (3x + 1)(9x^2 - 3x + 1^2)$$

1.4 Módulo

1.4.1 Módulo de um número real

O módulo (ou valor absoluto) de um número real x, que representamos por |x|, é definido a partir da seguinte relação:

- |x| = x, se x ≥ 0
- |x| = -x, se x ≤ 0

Podemos exemplificar: a distância entre as cidades B e C é 100km; o contrário também é verdade, de C para B a distância continua sendo 100km (e não -100km). Portanto, o módulo sempre resulta num número positivo.

Exemplos:

a) $|5 - x|$, com x > 5

Nesse exemplo, o número dentro do módulo é negativo, já que, de acordo com o enunciado, x é maior que 5, é necessário trocar o sinal:

$$|5 - x| =- (5 - x) = x - 5$$

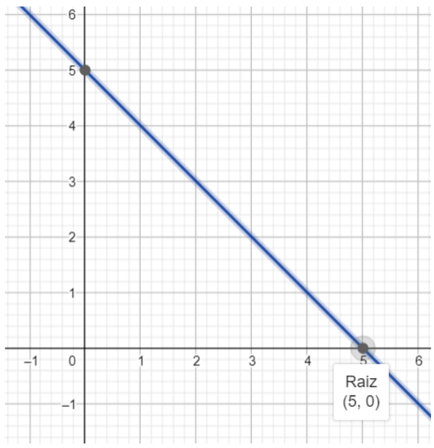
b) $|5 - x|$, com x ∈ R (conjunto dos números reais)

Para esse exemplo temos duas possibilidades, x > 5 e x < 5.

Para x > 5: $|5 - x| =- (5 - x) = x - 5$

Para x < 5: $|5 - x| = 5 - x$

Repare que o 5 é o que é conhecido como “ponto crítico” que é onde o sinal muda, isso acontece porque ele é a raíz (ponto que corta o eixo x) da equação $f(x) = 5 - x$, que pode ser vista na imagem abaixo:



c) $|x - 5| + |x - 2|$, com x < 2

Nesse caso, como x < 2, para ambos os módulos o valor será negativo. Portanto, é necessário inverter os sinais nos dois casos.

$$-(x - 5) - (x - 2) = x + 5 - x + 2 =- 2x + 7$$

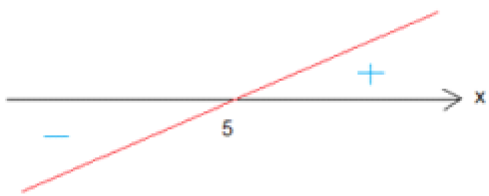
d) $|x - 5| + |x - 2|$, com x ∈ R

Para esse exemplo, como não é dado um intervalo específico para avaliar, é preciso fazer um estudo de sinal. Com isso, tem-se como f(x) a equação "$x - 5$" e como g(x) a equação "$x - 2$".

Para $f(x) = x - 5$: para encontrarmos a raiz da função, igualamos $f(x) = 0$

$$x - 5 = 0$$

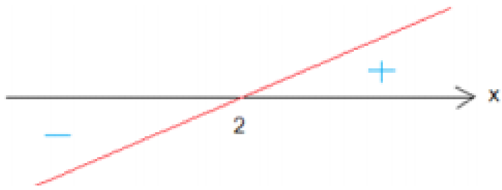
$$x = 5$$



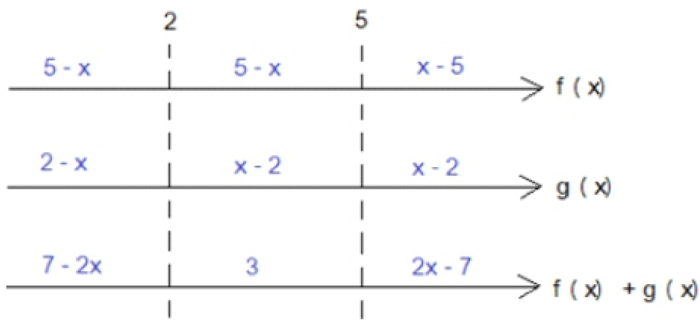
Para $g(x) = x - 2$: para encontrarmos a raiz da função, igualamos $g(x) = 0$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$



Para fazer a soma de f(x) e g(x), utilizaremos um meio visual onde é criado um tracejado com os valores “2” e “5”, visto que são as raízes das duas equações.



Mediante a esse processo, a solução será dada da seguinte maneira:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$$|x-5|+|x-2| = \begin{cases} 7-2x, & \text{se } x < 2 \\ 3, & \text{se } 2 \leq x \leq 5 \\ 2x-7, & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

1.4.2 Propriedades do módulo

I) Para todo x ∈ R, temos que $|x| = |-x|$;

II) Para todo x ∈ R, temos que $|x^2| = |x|^2 = x^2$;

Observação: para todo x ∈ R, temos que $\sqrt{x^2} = |x|$;

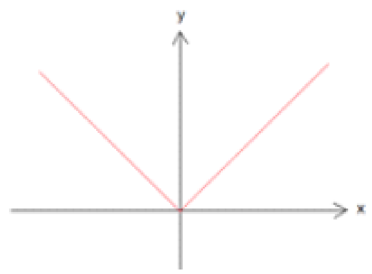
III) Para todo x e y ∈ R, temos que $|x\,.\,y| = |x|\,.\,|y|$;

IV) O módulo da soma é menor ou igual que a soma dos módulos, para todo $|x+y| \leq |x| + |y|$.

1.4.3 Função Modular: Gráfico

Denomina-se função modular a função f: R → R tal que: $f(x) = |x|$, ou seja,$f(x) = x$, para x > 0; $f(x) = -x$, para x < 0.

Graficamente:



Rod. Washington Luiz (SP-310)
km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589

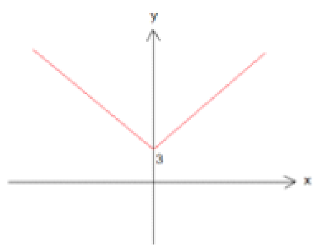
Observação: Contradomínio e imagem, nesse caso, são coisas diferentes. Quando a função segue f: R → R, o contradomínio são os reais (onde a seta está chegando). Porém, analisando o gráfico é possível afirmar que a imagem são os R^+.

1.4.4 Construção do gráfico com translação

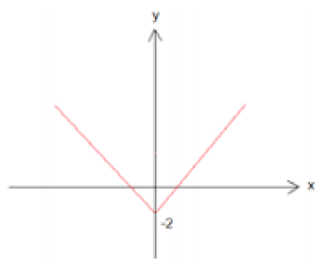
Antes de começar, é válido lembrar que um valor somado fora do módulo é responsável por transladar o gráfico verticalmente; já um valor somado dentro do módulo, é responsável por transladar o gráfico horizontalmente.

Exemplos:

a) $f(x) = |x| + 3$

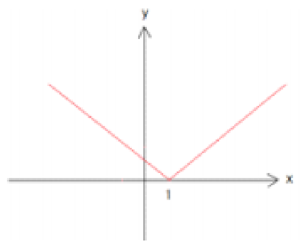


b) $f(x) = |x| - 2$

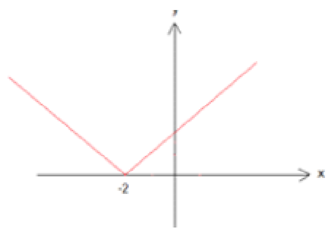


ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

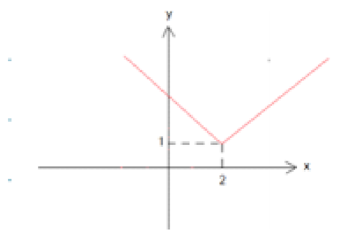
c) $f(x) = |x - 1|$



d) $f(x) = |x + 2|$



e) $f(x) = |x - 2| + 1$



Nesse último exemplo, vamos analisar o domínio, contradomínio e imagem da função.

Neste caso, o Domínio = R; Contradomínio = R; e Imagem = $[1, +\infty)$

1.4.5 Equações modulares

Equações modulares são aquelas em que a incógnita aparece dentro do módulo.

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Exemplos:

a) $|x - 3| = 5$

Esse exemplo só será verdade se:

$$x - 3 = 5 \text{ ou } x - 3 =- 5$$

$$x = 8 \qquad x =- 2$$

$$S = \{-2, 8\}$$

b) $|2x + 1| =- 4$

Nesse caso, não existe nenhuma solução que satisfaça essa equação, uma vez que não existe módulo que resulta em um número negativo.

c) $|\frac{(x-1)}{(x-3)}| = 2$**, para x ≠ 3;**

$$(x - 1)/(x - 3) = 2 \qquad (x - 1)/(x - 3) =- 2$$

$$x - 1 = 2x + 6 \qquad x - 1 =- 2x + 6$$

$$2x - x =- 1 + 6 \qquad 2x + x = 1 + 6$$

$$x = 5 \qquad x = 7/3$$

$$S = \{7/3, 5\}$$

d) $|x^2| - 3|x| - 10 = 0$

Pela segunda propriedade do módulo, temos que $|x^2| = |x|^2$. Considerando |x| por y:

$$y^2 - 3y - 10 = 0$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$$\Delta = (-3)^2 - 4 . 1 . (-10) = 49$$

$$y = [-(-3) \pm \sqrt{49}]/2$$

$$y' = 5 \ e \ y'' = -2$$

Como não existe módulo que resulte em número negativo, y” não é considerado como resultado válido (solução vazia).

Desse modo, temos que $y = 5 = |x|$, e nesse caso:

$$x = 5 \ ou \ x = -5$$

$$S = \{-5, 5\}$$

e) $|x^2 - x - 1| = 1$

Para esse exemplo, existem duas opções possíveis:

- Primeira opção:

$$x^2 - x - 1 = 1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 . 1 . (-2) = 9$$

$$x = [-(-1) \pm \sqrt{9}]/2$$

$$x' = 2 \ e \ x'' = -1$$

- Segunda opção:

$$x^2 - x - 1 = -1$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

Com isso ou x = 0 ou x - 1 = 0, e portanto x = 1.

$$S = \{-1, 0, 1, 2\}$$

1.4.6 Inequações modulares

Inequações modulares são aquelas que envolvem a incógnita em módulo.

Exemplos:

a) $|x| > a \; com \; a > 0$

$$|x| < a \rightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \rightarrow x < -a \;\; ou \;\; x > a$$

b) $|x + 2| < 5$

$$-5 < x + 2 < 5$$

Subtraindo -2 de todos os lados da inequação:

$$-5 - 2 < x < 5 - 2$$

$$-7 < x < 3$$

$$S = \{x \in R / -7 < x < 3\}$$

c) $4 < |x + 1| < 6$

Separando em dois e analisando separadamente:

PET ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Para $4 < |x + 1|$:

$$-4 < x + 1 < 4$$

$$-4 - 1 < x < 4 - 1$$

$$-5 < x < 3$$

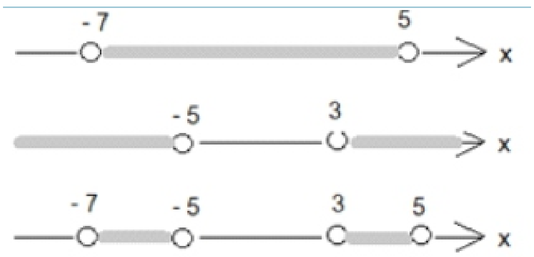
Para $|x + 1| < 6$:

$$-6 < x + 1 < 6$$

$$-6 - 1 < x < 6 - 1$$

$$-7 < x < 5$$

Juntando as duas soluções, chegamos na solução geral do problema:



$$S = \{x \in R / -7 < x < -5 \ ou \ 3 < x < 5\}$$

1.5 Logaritmo

A equação a seguir pode ser resolvida com facilidade a partir da fatoração de ambos os membros por um fator comum, no caso, o número dois:

$$2^x = 8, \text{com } x \in R$$

$$2^x = 2^3$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

O que nos possibilita terminar de resolver este problema é a propriedade do exponencial que permite, nos casos de bases iguais, que possamos igualar os expoentes e assim resolver uma equação comum.

$$x = 3$$

Porém, ao tentarmos resolver equações mais complicadas, como a abaixo, por não ser possível fatorar 7 e 2 em um fator comum, não podemos resolver da mesma forma como feito anteriormente.

$$2^x = 7, \text{com } x \in R$$

Uma técnica utilizada é analisar as aproximações. Por 7 estar entre 4 e 8, podemos concluir que x está entre 2 e 3, pois:

$$4 < 7 < 8$$

$$2^2 < 2^x < 2^3$$

$$2 < x < 3$$

Para resolvermos este e outros problemas com exatidão, podemos utilizar uma ferramenta valiosa, denominada "**logaritmo**"

1.5.1 Definição

Sejam a e b números reais e positivos, com a ≠ 1, então:

$$\log a(b) = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Sendo:

a - base do logaritmo (mesma base da potência)

b - logaritmando (resultado da potência)

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

c - logaritmo (expoente)

Para essa função, existem condições de existência, são elas:

- a > 0
- a ≠ 1
- b > 0

1.5.2 Sistema de logaritmos decimais

Quando a base é igual à 10 é comum que esta seja omitida da representação:

$$log10(x) = log(x)$$

Um exemplo, é $log10(2) = log(2)$.

Como consequência, temos:

I. $loga(a) = 1$

Como exemplo, temos que $log10(10) = x$

$$10^x = 10^1$$

$$x = 1$$

Logo, $log10(10) = 1$, conforme a consequência I.

II. $loga(1) = 0$

Como exemplo, temos: $log10(1) = x$

$$10^x = 1 = 10^0$$

$$x = 0$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Logo, $log10(1) = 0$, conforme a consequência II.

III. $loga(a^b) = b \Leftrightarrow a^b = a^b$

Como exemplo, temos: $log10(0,02) = x$

$$log10(10^{-2}) = x$$

$$10^x = 10^{-2}$$

$$x =- 2$$

Logo, $log10(10^{-2}) =- 2 \Leftrightarrow 10^{-2} = 10^{-2}$, conforme a consequência III.

IV. $a^{loga(b)} = b$

Como exemplo, temos: $10^{log10(100)} = x$

Como $x = 10^2 = 100$, temos então que $log10(100) = 2$

Logo, $10^{log10(100)} = 100$, conforme a consequência IV.

V. $loga(x) = loga(y) \Leftrightarrow x = y$

Como exemplo, temos: $log2(3) = log2(x - 3)$

Como a base é a mesma, deve-se respeitar a igualdade conforme a consequência V indica, logo:

$(x - 3) = 3$

$x = 6$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Exemplo: Calcular o valor da expressão $Y = 3^{log3(5)} + 4^{log2(7)}$

$$Y = 3^{log3(5)} + 4^{log2(7)}$$

$$Y = 5 + (2^2)^{log2(7)}$$

$$Y = 5 + (2^{log2(7)})^2$$

$$Y = 5 + 7^2$$

$$Y = 54$$

1.5.3 Propriedades

I. **Propriedade do produto:** Numa mesma base a (a > 0 e a ≠ 1), o logaritmo do produto de dois números reais e positivos é igual à soma dos logaritmos desses números. Simbolicamente:

$$loga(x \cdot y) = loga(x) + loga(y)$$

Exemplo: $log3(200) = log3(2 \cdot 100) = log3(2) + log3(100)$

II. **Logaritmo do quociente:** Numa mesma base a (a > 0 e a ≠ 1), o logaritmo do quociente de dois números reais e positivos é igual à diferença dos logaritmos desses números. Simbolicamente:

$$loga(\frac{x}{y}) = loga(x) - loga(y)$$

Exemplo: $log7(\frac{3}{5}) = log7(3) - log7(5)$

III. **Logaritmo da potência no logaritmando:** Numa mesma base a (a > 0 e a ≠ 1), o logaritmo da potência do logaritmando é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência. Simbolicamente:

$$loga(x^y) = y \cdot loga(x)$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Exemplo: $log4(3^2) = 2 \cdot log4(3)$

Cuidado: $loga(x^y) \neq (loga(x))^y$. A propriedade é válida apenas quando o expoente é do x.

IV. **Logaritmo da potência na base:** Numa mesma base a (a > 0 e a ≠ 1), o logaritmo da potência da base é igual ao produto do inverso do expoente pelo logaritmo da base da potência. Simbolicamente:

$$loga^y(x) = \frac{1}{y} \cdot loga(x)$$

Exemplo: $log4^2(3) = \frac{1}{2} \cdot log4(3)$

Exemplos: Supondo que $log2 \approx 0,30$ e $log3 \approx 0,48$, determine:

a) $log6$

$log6 = log(2 \cdot 3)$

$log6 = log2 + log3 \rightarrow$ Aplicando a propriedade I

$log6 = 0,30 + 0,48$

$log6 = 0,78$

b) $log5$

$log5 = log(2 + 3)$

Cuidado: não existe propriedade para este caso, portanto, é necessário pensar em outra opção, como $\frac{10}{2} = 5$

$log5 = log\frac{10}{2}$

$log5 = log10 - log2 \rightarrow$ Aplicando a propriedade II

Rod. Washington Luiz (SP-310)
km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589

$$log5 = 1 - 0,30$$

$$log5 = 0,70$$

1.5.4 Mudança de base

Há situações em que logaritmos em bases diferentes precisam ser convertidos para uma única base conveniente, para que possamos aplicar as propriedades operatórias.

Se a, b e c são números reais positivos e a e c diferentes de 1, então:

$$loga(b) = \frac{logc(b)}{logc(a)}$$

Sendo:

a - base antiga

c - base nova

Exemplos:

a) Converta $log3(5)$ para a base 2:

$$log3(5) = \frac{log2(5)}{log2(3)}$$

b) Calcule o valor de $log2(3)$, supondo que $log2 \approx 0,30$ e $log3 \approx 0,48$.

$log2(3) = \frac{log10(3)}{log10(2)}$ → Aplicando a mudança de base

$$log2(3) \approx \frac{0,48}{0,30}$$

$$log2(3) \approx \frac{8}{5}$$

c) Utilizando os dados anteriormente fornecidos, calcule $log3(2)$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$log3(2) = \frac{log10(2)}{log10(3)}$ → Aplicando a mudança de base

$log3(2) \approx \frac{0{,}30}{0{,}48}$

$log3(2) \approx \frac{5}{8}$

Observando os exemplos a e b, temos:

- $log2(3) \approx \frac{8}{5}$
- $log3(2) \approx \frac{5}{8}$

Logo: $log2(3) = \frac{1}{log3(2)}$

Este é um exemplo de uma **quinta propriedade**:

$$loga(b) = \frac{1}{logb(a)} \text{ ou } loga(b) \cdot logb(a) = 1$$

Isto ocorre pois quando fazemos uma mudança de base, que inverte a base com o logaritmando, temos os seguintes passos:

$logb(a) = \frac{logb(b)}{logb(a)}$ → Considerando a primeira consequência da definição, temos que $logb(b) = 1$, logo: $logb(a) = \frac{1}{logb(a)}$

d) Calcule o valor da expressão $Y = log3(\pi) \cdot log\pi(81)$

$Y = log3(\pi) \cdot log\pi(81)$ → Aplicando a mudança de base:

$Y = \frac{log10(\pi)}{log10(3)} \cdot \frac{log10(81)}{log10(\pi)}$ → "Cortando" o $log10(\pi)$ por aparecer no numerador da primeira equação e no denominador da segunda, teremos:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$Y = \frac{log10(81)}{log10(3)}$ → Utilizando a "volta" da propriedade de mudança de base, teremos:

$Y = log3(81) = log3(3^4) = 4$

Este é um exemplo de uma **sexta propriedade:**

$$loga(b) \cdot logb(c) = loga(c)$$

1.5.5 Logaritmos Naturais

A constante de Euler, e, é um número irracional que equivale a aproximadamente:

$$e = 2,71828188... \notin Q$$

Quando a base do logaritmo é a constante de Euler (e) é nomeado como logaritmo natural e pode ser indicado de duas formas:

$$loge(x) = ln(x)$$

A importância deste tipo de logaritmo e a razão de ser chamado de logaritmo natural se relaciona ao fato de vários fenômenos da natureza poderem ser descritos por esse logaritmo.

2. GEOMETRIA ANALÍTICA

Neste capítulo, serão abordados os principais tópicos para servir de base para sua jornada na disciplina de Geometria Analítica, contando com: vetor, produtos escalar, produto vetorial, espaço cartesiano e 3D, ortogonalidade e paralelismo, retas e propriedades.

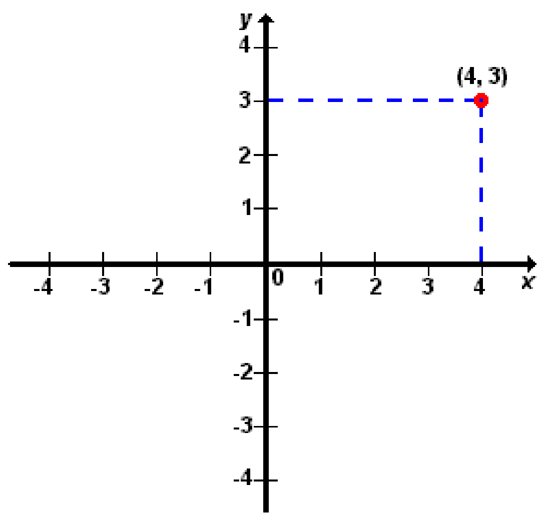
ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

2.1 Plano cartesiano

O Plano Cartesiano é um plano formado por duas retas infinitas, com 90° entre si, que contém infinitos pontos. A reta na vertical é chamada de ordenada, normalmente denominada de eixo y. E a reta na horizontal é chamada abscissa, normalmente denominada de eixo x.

É utilizado no estudo de diferentes funções e de seus comportamentos. Podendo-se nela, identificar qualquer ponto no espaço, utilizando duas coordenadas na configuração P(x,y), onde P é o nome do ponto, x identifica sua posição no eixo das abscissas e y sua posição no eixo das ordenadas.

Exemplo:

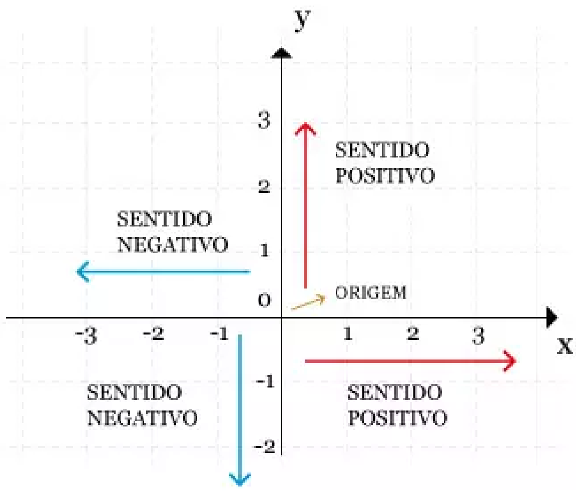


2.1.1 Direções positivas e negativas

Como o plano é formado por retas infinitas, essas crescem tanto em direções positivas quanto em direções negativas. Seguindo a convenção, a partir do ponto (0,0), também conhecido como origem, o eixo das ordenadas tem direção positiva para cima e negativa para baixo. Enquanto o eixo das abscissas, a partir do ponto (0,0), cresce positivamente para direita e negativamente para esquerda.

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

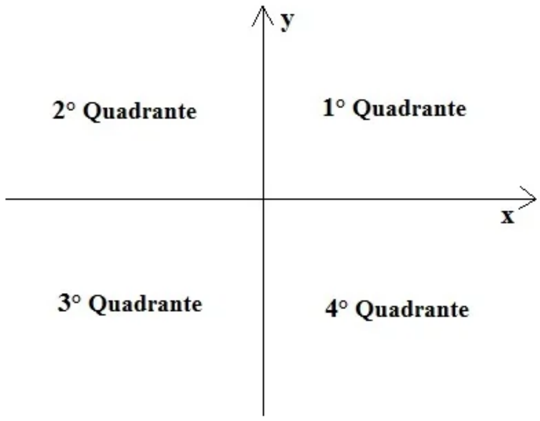
Resumo: eixo x - ← | → + e eixo y - ↓ | ↑ +



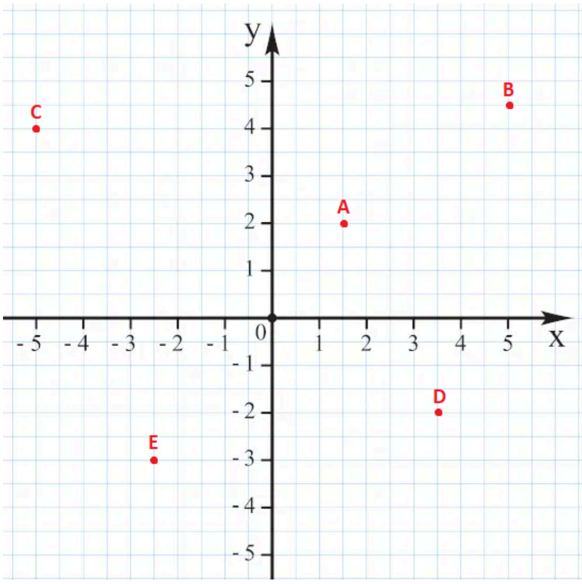
2.1.2 Quadrantes

Assim como cada eixo possui um nome, as diferentes regiões do plano cartesiano também são nomeadas, no sentido anti-horário, em: 1°, 2°, 3° e 4°.

- 1° Quadrante: região superior à direita. Todos os pontos possuem ordenada e abscissa com valor positivo.
- 2° Quadrante: região superior à esquerda. Todos os pontos possuem ordenada de valor positivo e abscissa de valor negativo.
- 3° Quadrante: região inferior à esquerda. Todos os pontos possuem ordenada e abscissa com valor negativo.
- 4° Quadrante: região inferior à direita. Todos os pontos possuem abscissa com valor positivo e ordenada de valor negativo.

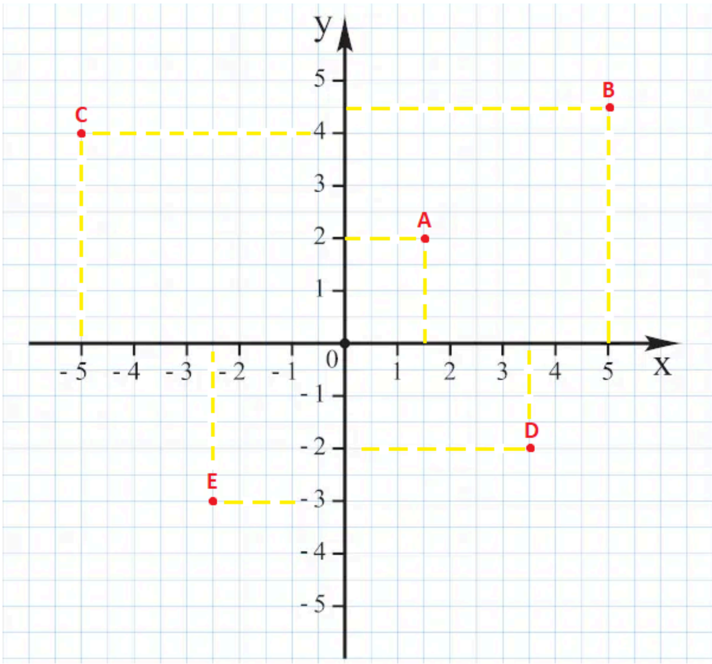


Exemplo: Localize os pontos A, B, C, D e E a seguir, indicando o quadrante em que se encontram.



- A (1,5 , 2) - 1° Quadrante;
- B (5, 4,5) - 1° Quadrante;
- C (-5 , 4) - 2° Quadrante;
- D (3,5 , -2) - 4° Quadrante;
- E (-2,5 , -3) - 3° Quadrante.

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589



2.2 Plano 3D

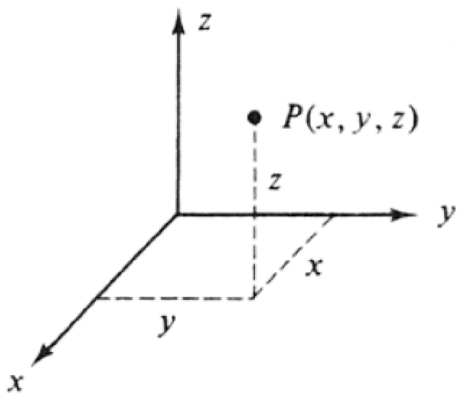
O Plano 3D é um plano formado por três retas infinitas, com 90° entre si, que contém infinitos pontos. Podemos entendê-lo como um plano cartesiano deitado no chão que agora, além das duas coordenadas conhecidas, possui uma coordenada de “altura”. Ou, se preferirem, em um plano cartesiano com uma coordenada a mais saindo da tela.

Assim como o plano cartesiano, o plano 3D é utilizado para o estudo de funções e para localização de pontos. Porém agora os pontos localizam-se no espaço e não apenas em uma superfície.

A configuração destes é: P(x,y,z), sendo denominado por três coordenadas, sendo essas x (abscissa), y (ordenada) e z (cota), podendo também ser chamado de i, j, k.

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Exemplo:



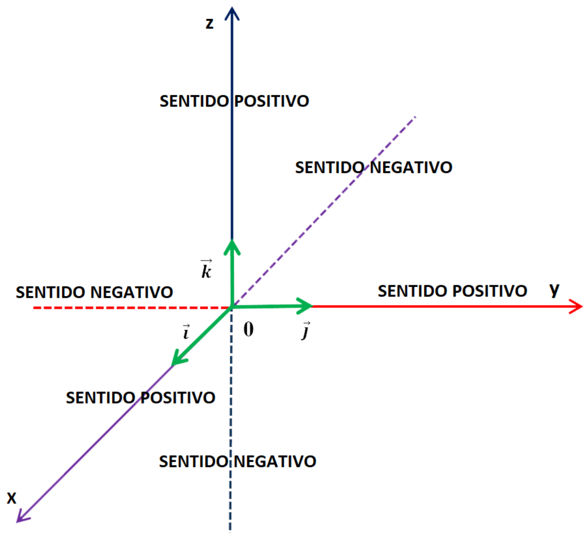
2.2.1 Direções positivas e negativas

Como o plano é formado por retas infinitas, essas crescem tanto em direções positivas quanto em direções negativas.

Seguindo a convenção, a partir do ponto (0,0,0), a coordenada x cresce positivamente no sentido "saindo da tela" e negativamente no sentido contrário, "se afastando".

A coordenada y, a partir do ponto (0,0,0), cresce positivamente para a direita e negativamente para direita.

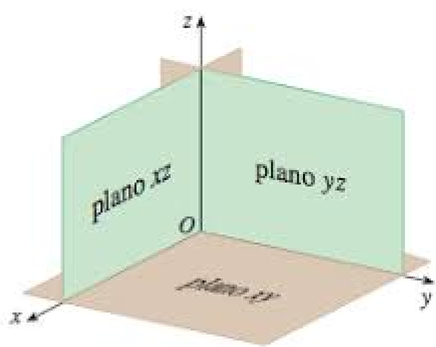
Por fim, a coordenada z, a partir do ponto (0,0,0), cresce positivamente para cima e negativamente para baixo.



2.2.2 Planos coordenados e Octantes

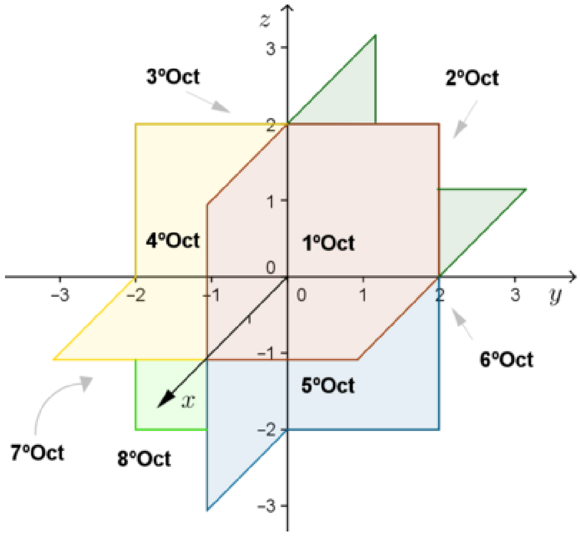
Os três eixos coordenados do plano 3D determinam três planos coordenados infinitos:

- plano xz: determinado pelo eixo x e eixo z, em que o ponto é caracterizado por P(x,0,z);
- plano yz: determinado pelo eixo y e eixo z, em que o ponto é caracterizado por P(0,y,z);
- plano xy: determinado pelo eixo x e eixo y, em que o ponto é caracterizado por P(x,y,0).



Rod. Washington Luiz (SP-310)
km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589

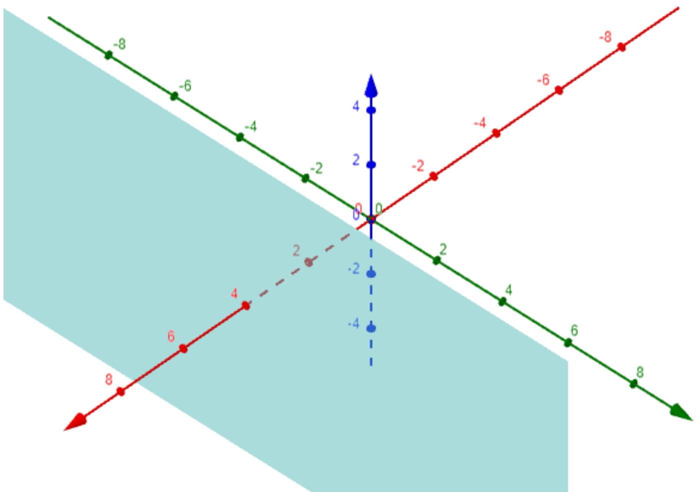
Pensando nos planos coordenados como "paredes", esses dividem o espaço em oito partes chamadas octantes.



Exemplo: Que superfícies de R^3 são representadas pelas equações:

a) $x = 4$;

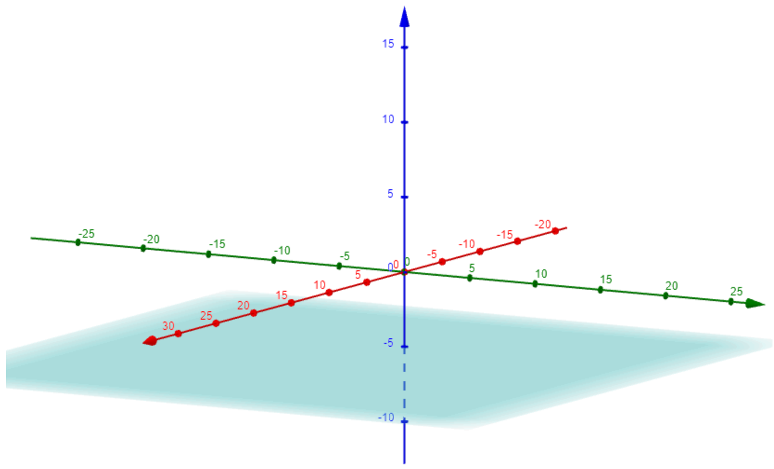
A equação $x = 4$ representa o conjunto $\{(x, y, z) \mid x = 4\}$. Nesse caso, x tem valor fixo de 4 e y e z podem assumir qualquer valor. A equação formará uma superfície no plano 3D paralela ao plano coordenado yz.



PET Engenharia Civil
Departamento de Engenharia Civil
Universidade Federal de São Carlos
Rod. Washington Luiz (SP-310)
km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589

b) z = -5

A equação z = -5 representa o conjunto {(x, y, z) | z = -5}. Nesse caso, z tem valor fixo de -5 e x e y podem assumir qualquer valor. A equação formará uma superfície no plano 3D paralela ao plano coordenado xy.



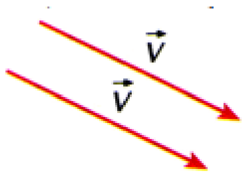
2.3 Vetores

Muitas grandezas físicas, como velocidade, força, deslocamento e impulso, para serem completamente identificadas, precisam, além do módulo, da direção e do sentido. Estas grandezas são chamadas grandezas vetoriais ou simplesmente vetores.

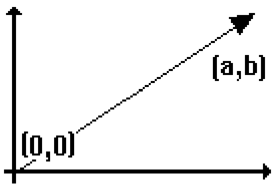
Geometricamente, vetores são representados por segmentos de retas orientadas (com um sentido e direção) no plano ou no espaço.

Dizemos que dois vetores são iguais se eles possuem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.

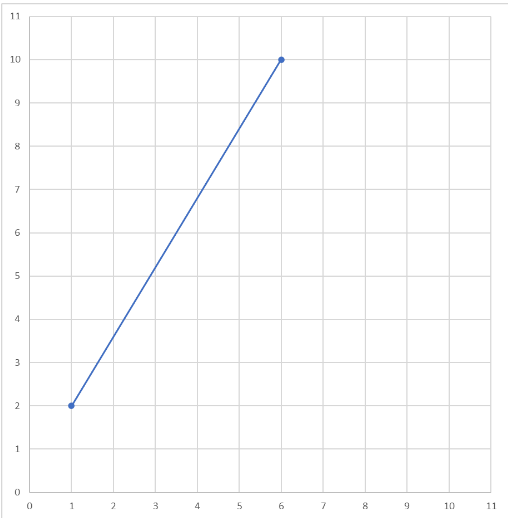
Rod. Washington Luiz (SP-310)
km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589



Vetores também podem representar a distância entre dois pontos em um plano ou espaço.



Exemplo: Se um vetor v tem origem no ponto (1,2) e extremidade no ponto (7,12), ele é dado por v=(6,10), pois:



$$v=(7,12)-(1,2)=(6,10)$$

2.3.1 Representação de vetor

Vetores comumente são escritos por uma letra minúscula com uma pequena seta em cima. Essa representação é a mais utilizadas pelos autores nos livros de geometria analítica e de física, contudo vetores também podem ser representados apenas por uma letra:

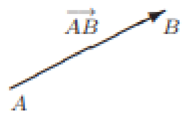
$$\overrightarrow{v} = (a, b)$$

$$v = (a, b)$$

Onde a é o valor do comprimento no eixo x e b, no eixo y.

Além disso, se o ponto inicial de um vetor V é A e o ponto final é B, então podemos escrever:

$$V = \overrightarrow{AB}$$



2.3.2 Soma de vetores

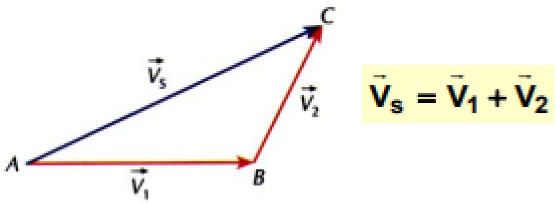
A soma de vetores pode ser realizada de duas maneiras: a **regra do polígono** e a **regra do paralelogramo**.

A regra do polígono é realizada através dos seguintes procedimentos:

1) Juntar os vetores de forma que a origem de um coincida com a extremidade do outro. Esse passo deve ser realizado sucessivamente, unindo todos os vetores que devem ser somados;

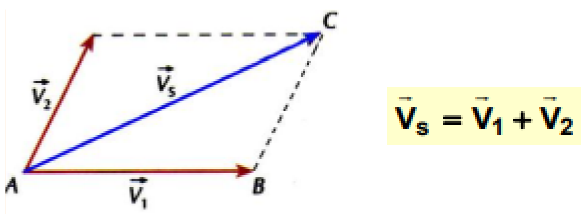
Rod. Washington Luiz (SP-310) km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589

2) Traçar uma reta que liga a origem do primeiro vetor a extremidade do último vetor, de forma que o polígono seja fechado. Essa reta será a resultante da soma dos vetores;
3) Somar a reta desenhada, conforme o exemplo a seguir;



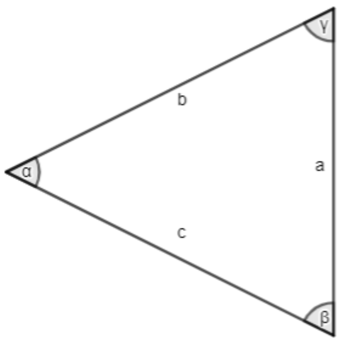
Por sua vez, a regra do paralelogramo é realizada através dos seguintes passos:

1) Juntar a origem dos vetores;
2) Traçar uma linha paralela a cada um dos vetores, formando um paralelogramo;
3) Somar a diagonal do paralelogramo, que será a resultante da soma dos vetores, conforme o exemplo a seguir;



Vale ressaltar que na regra do polígono é possível realizar a soma de vários vetores por vez. Já na regra do paralelogramo, é possível somar apenas dois vetores por vez.

Após a definição da resultante, basta utilizar algum método de determinação de lado de triângulo para obter o seu módulo. Os dois mais comumente utilizados são a **lei do seno** e a **lei do cosseno**.



Considerando o triângulo apresentado, a lei do seno é dada pela equação:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}$$

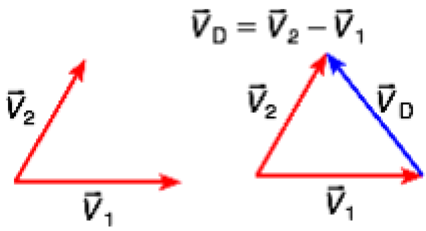
A lei do cosseno, por sua vez, é dada pela equação:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\,\gamma$$

Com a lei do cosseno, é possível notar que para vetores perpendiculares, ou seja, vetores que formam 90° entre si, o módulo da resultante pode ser encontrado utilizando o teorema de pitágoras.

2.3.3 Diferença entre vetores

A diferença entre vetores é realizada através dos mesmos procedimentos utilizados na soma dos vetores, descritos na Seção 2.3.2. No entanto, nesse caso, é preciso atentar-se a troca de sentido do vetor que será subtraído. Assim, a regra do polígono é dada conforme o exemplo a seguir.



2.3.4 Módulo do vetor (Norma)

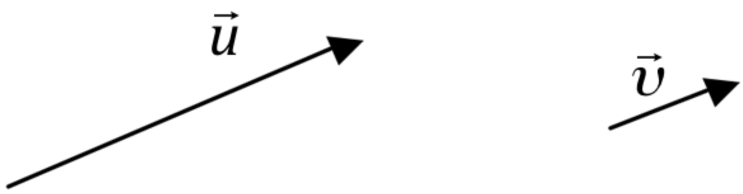
O valor, módulo, norma ou intensidade do vetor v=(a,b) é o número real, não negativo, obtido pela fórmula:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Quando o valor do módulo é igual a 1, o vetor é chamado de vetor unitário. No espaço R³, existem três vetores unitários: i=(1,0,0); j=(0,1,0) e k=(0,0,1) que formam a base canônica.

Além disso, existe um vetor que possui mesma direção e mesmo sentido que outro vetor, mas possui apenas uma unidade de comprimento, ele é chamado de versor.

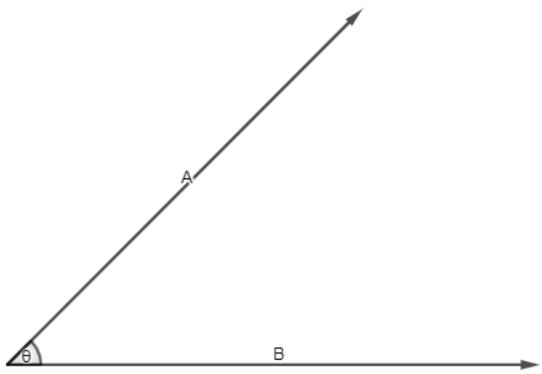
Assim, se $\vec{v}$ é versor de $\vec{u}$, então $\vec{v}$ possui a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{u}$, mas possui módulo igual a 1 ($|\vec{v}|$ =1).



2.4 Produto Escalar

O produto escalar é uma operação entre vetores que sempre vai gerar um número como resposta, por isso o nome escalar, podendo este número ser positivo, negativo ou zero. Assim, o produto escalar é definido da seguinte maneira.

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A| \cdot |B| \cdot \cos\theta$$

Podemos ler esta operação como: "A escalar B" ou "O escalar de A por B". É necessário muita atenção pois o pontinho significa que a operação é escalar.

Para determinar o valor da parcela à esquerda da igualdade, que representa o produto escalar, basta multiplicar a coordenada x do vetor A pela coordenada x do vetor B e assim em diante. Por fim, deve-se somar os valores, resultando em um único número, conforme o exemplo a seguir.

Exemplo: Qual o produto escalar de **u = (1,3,6)** e **v = (5,-9,4)**?

$$u \cdot v = (1 \cdot 5) + (3 \cdot (-9)) + (6 \cdot 4)$$

$$u \cdot v = 5 - 27 + 24$$

$$u \cdot v = 2$$

A partir do valor do produto escalar, é possível classificar o ângulo entre os vetores como ângulo agudo, obtuso, reto, nulo ou raso:

- Se o resultado do produto escalar for um número positivo (maior que zero), o ângulo formado entre os dois vetores é agudo (entre 0º e 90º);
- Se o resultado do produto escalar for um número negativo (menor que zero), o ângulo formado entre os dois vetores é obtuso (entre 90º e 180º);
- Se resultado do produto escalar for 0 (zero), o ângulo formado entre os dois vetores é reto (90º), ou seja, os vetores são ortogonais;

- Em casos especiais, se o resultado do produto escalar for 1, o ângulo formado é nulo (0º). Caso o resultado seja -1, o ângulo será raso (180º). Ambos podem denominar vetores colineares.

Exemplo: Determinação do tipo de ângulo entre os vetores u e v, sendo **u = (1, 4, -3)** e **v = (-1, 2, 0)**.

$$u \cdot v = (1 \cdot (-1)) + (4 \cdot 2) + ((-3) \cdot 0)$$

$$u \cdot v = -1 + 8 + 0$$

$$u \cdot v = 7$$

Como 7>0, o ângulo é **agudo**.

Para determinar o valor efetivo do ângulo, é preciso utilizar a equação apresentada anteriormente para o produto escalar. Rearranjando os seus componentes para melhor entendimento, tem-se:

$$cos\,\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|A| \cdot |B|}$$

Dessa forma, o cosseno de θ é igual ao produto escalar de A por B dividido pelo módulo de A vezes o módulo de B. O cálculo do produto escalar foi apresentado no início desta seção. Já o módulo de um vetor é um número real não negativo dado pela raiz quadrada da soma das suas coordenadas, conforme apresentado a seguir.

$$|A| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Exemplo: Considerando **u = (1, 4, -3)** e **v = (-1, 2, 0)**, qual é o ângulo entre esses vetores?

$$cos\,\theta = \frac{(1\cdot(-1))+(4\cdot2)+((-3)\cdot0)}{\sqrt{1^2+4^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}}$$

$$cos\,\theta = \frac{7}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{5}}$$

$$cos\,\theta = \frac{7}{\sqrt{130}}$$

$$cos\,\theta = 0,614$$

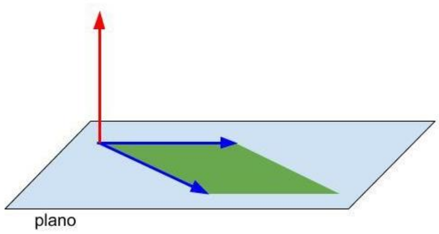
$$\theta = arco = cos^{-1}(0,614) = 52,12°$$

2.5 Produto Vetorial

2.5.1 Propriedades do produto vetorial

O produto vetorial entre dois vetores pode ser escrito como $\vec{a} \times \vec{b}$ (a pronúncia é "a vetorial b"). Diferentemente do produto escalar, que retorna um número, o resultado de um produto vetorial é outro vetor. Digamos que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. Esse novo vetor $\vec{c}$ tem 2 propriedades especiais.

Primeiro, ele é é perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Colocando isso em termos do produto escalar, poderíamos dizer que $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \times \vec{b} = 0$. Para entender melhor, imagine dois caminhos cruzando-se e uma placa surgindo exatamente onde eles se encontram.



PET ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

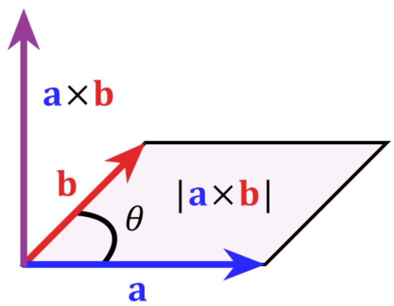
Essa propriedade, por si só, faz com que o produto vetorial seja muito útil. É por isso também que o produto vetorial funciona apenas em três dimensões. Em duas dimensões, nem sempre há um vetor perpendicular a qualquer par de outros vetores. Em quatro ou mais dimensões, há infinitos vetores perpendiculares a um determinado par de vetores.

Em segundo lugar, o comprimento de $\vec{c}$ é uma medida da distância entre as direções em que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ estão apontando, aumentada pela magnitude deles.

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Isso é semelhante ao produto escalar, mas em vez de $cos(\theta)$ o produto vetorial usa $sen(\theta)$, sendo θ o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Dessa forma, quando o ângulo for 90°, o produto vetorial é o maior possível. Assim, o produto escalar e o produto vetorial são complementares um ao outro.

Há uma interpretação do comprimento de $\vec{c}$ que é especialmente útil. Pense no paralelogramo formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A base do paralelogramo tem um comprimento $\left\|\vec{a}\right\|$, e a altura tem um comprimento $\left\|\vec{b}\right\| sen(\theta)$. Isso significa que a área do paralelogramo no total é exatamente a magnitude do produto vetorial.

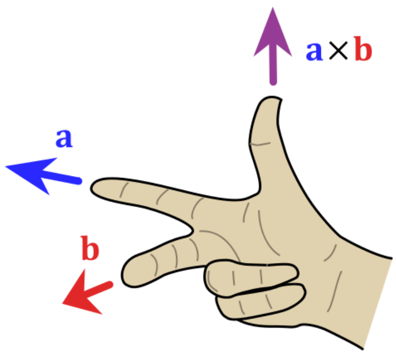


ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

2.5.2 Regra da Mão Direita

Observe que na imagem acima o produto vetorial é perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{b}$, como esperado. Mas há, na realidade, dois vetores que poderiam ser perpendiculares a $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Se $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, então essas duas opções são $\vec{c}$ e $-\vec{c}$. Como decidimos qual das duas opções perfeitamente válidas é o produto vetorial?

Temos uma convenção chamada regra da mão direita para resolver essa ambiguidade. Se você levantar sua mão direita, apontar seu dedo indicador na direção de $\vec{a}$ e apontar seu dedo médio na direção de $\vec{b}$, então seu dedão vai apontar na direção de $\vec{a} \times \vec{b}$.



2.6 Matrizes

Uma matriz A, $m \times n$ (m por n), é uma tabela de $m * n$ números dispostos em m linhas e n colunas

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

O elemento da matriz A que está na linha i e coluna j é indicado por a_{ij}.

2.6.1 Diagonal Principal

A diagonal principal é formada pelos elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}, ou seja, os elementos a_{ij}, tais que i = j. A diagonal principal de uma matriz une o seu canto superior esquerdo ao canto inferior direito. Por exemplo a matriz a seguir tem todos os elementos da diagonal principal igual a 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.6.2 Tipos de Matrizes

2.6.2.1 Matriz Nula

É a matriz em que todos os seus elementos são nulos (ou seja, uma matriz composta por zeros).

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.6.2.2 Matriz Quadrada de Ordem n

É uma matriz com a mesma quantidade de linhas e colunas (n). Por exemplo a seguinte matriz quadrada de ordem 3:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$$M_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

2.6.2.3 Matriz Identidade de Ordem n

Matriz identidade de ordem n (denotamos por I_n, ou Id_n) é a matriz onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, e o restante é igual a zero.

É o elemento neutro da MULTIPLICAÇÃO, ou seja qualquer matriz multiplicada pela identidade da mesma ordem é igual a ela mesma, assim como 2.1 = 2.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \cdots$$

2.6.2.3 Matriz Inversa

A matriz inversa (ou invertível) é um tipo de matriz quadrada, ou seja, que possui o número de linhas (m) igual ao de colunas (n). Ela ocorre quando o produto de duas matrizes resulta em uma matriz identidade de mesma ordem (mesmo número de linhas e colunas). Logo:

$$M.M^{-1} = I_n$$

Exemplo:

$$\mathbf{A} \text{ é inversa de } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ é } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{A}^{-1} \,.\, \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$$

Existem propriedades que resultam da definição de uma matriz inversa:

- Existe somente uma inversa para cada matriz;
- Nem todas as matrizes possuem uma matriz inversa. Elas apresentam quando o seu determinante é diferente de zero, ou seja, det (M) ≠ 0;
- A inversa de uma matriz inversa é sempre a própria matriz, ou seja, $(M^{-1})^{-1} = M$;
- A inversa de uma matriz identidade é ela mesma, ou seja, $I^{-1} = I$;

2.6.2.5 Matriz Triangular Superior

É uma matriz que possui o elemento $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$. Basta que tenha apenas zeros abaixo de sua diagonal principal.

Por exemplo, a matriz triangular superior 4 x 4 é da seguinte forma:

$$K_{4x4} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & j & k \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Não importa se alguma das letras for zero também, o que importa é que tem que ter zero no lugar indicado!!!

2.6.2.6 Matriz Triangular Inferior

A matriz triangular inferior funciona quase igual à superior, só que ela possui os elementos $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$. Ou seja, tem apenas zeros em cima da diagonal principal. Por exemplo:

$$L_{4x4} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{pmatrix}$$

2.6.2.7 Matriz Diagonal

É uma matriz que possui $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Basta que todos os elementos fora da diagonal principal sejam 0. Os da diagonal principal podem ser qualquer coisa. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

PET ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

2.6.2.8 Matriz Transposta

Dada uma matriz A de ordem m x n, chama-se matriz transposta de A, indicada por A^T, a matriz cuja ordem n x m, sendo as suas linhas ordenadamente iguais às colunas da matriz A.

$$B_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad B^t_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Existem propriedades que resultam da definição de uma matriz transposta:

- $(A^T)^T = A$: essa propriedade indica que a transposta de uma matriz transposta é a matriz original;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$: a transposta da soma de duas matrizes é igual a soma da transposta de cada uma delas;
- $(A.B)^T = B^T.A^T$: a transposta da multiplicação de duas matriz é igual ao produto das transpostas de cada uma delas, em ordem inversa;
- det(M^T) = det (M): o determinante da matriz transposta é igual ao determinante da matriz original;

2.6.3 Determinante

O determinante é um número associado a uma matriz quadrada, ou seja, matriz que apresenta o mesmo número de linhas e de colunas (m=n).

2.6.3.1 Matriz de Ordem 1

Em uma matriz de ordem 1, o seu determinante será igual ao seu único termo.

$$A = [a_{11}]$$

$$det(A) = |a_{11}| = a_{11}$$

2.6.3.2 Matriz de Ordem 2

Para calcular o determinante de uma matriz de ordem 2, calcula-se a diferença entre o produto dos termos da diagonal principal da matriz e o produto dos termos da diagonal secundária da matriz (Regra de Sarrus):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$det\,(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

2.6.3.3 Matriz de Ordem 3

Inicialmente, é necessário duplicar as duas primeiras colunas no final da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$det(A) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

Em seguida, multiplique os termos de cada uma das três diagonais que estão no mesmo sentido da diagonal principal:

$$det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

$$det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{23} \cdot a_{23} \cdot a_{23} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - D_s$$

O mesmo deve ser realizados com as diagonais no sentido da diagonal secundária:

$$det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{23}a_{23}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{22}a_{31})$$
$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{23}a_{23}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Note que os termos da diagonal secundária estão acompanhados com sinal negativo, ou seja, sempre trocamos o sinal do resultado da multiplicação dos termos da diagonal secundária.

2.6.4 Operações com Matrizes

As operações matriciais compartilham similaridades com operações vetoriais, sendo, na realidade, idênticas em certos aspectos.

2.6.4.1 Adição e Subtração

Considere a adição e a subtração de vetores, que é realizada através, respectivamente, da soma ou diferença dos elementos correspondentes em cada vetor. Esta operação é análoga à adição matricial:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+4) & (0+3) \\ (2+0) & (-1+5) \\ (4+9) & (8-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-1 \\ 3-8 & 4-4 \\ 5-5 & 6-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

2.6.4.2 Multiplicação

Da mesma forma da adição e subtração, a multiplicação de um vetor por um escalar, que envolve a multiplicação de cada componente do vetor pelo escalar, é semelhante ao processo de multiplicar cada elemento de uma matriz por um escalar:

$$3 \cdot I_2 = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

No entanto, a multiplicação entre matrizes é ligeiramente mais complexa e impõe certas restrições. De início, matrizes só podem ser multiplicadas quando o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz. Por exemplo, é possível multiplicar uma matriz de dimensão 2×3 por uma matriz 3×4, já que a primeira possui 3 colunas e a segunda tem 3 linhas. Inversamente, não seria possível multiplicar uma matriz 3×4 por uma 2×3 devido à incompatibilidade das dimensões.

O produto $A \cdot B$ resultará em uma nova matriz C cujas dimensões serão determinadas pelo número de linhas da matriz A e pelo número de colunas da matriz B. É importante notar que a multiplicação de matrizes não é comutativa; ou seja, em geral, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Exemplo: Seja A_{2X3} uma matriz com duas linhas e três colunas, e B_{3X4} uma matriz com três linhas e quatro colunas. A multiplicação $A_{2X3} \cdot B_{3X4}$ é possível e resultará em uma matriz C_{2X4}, ou seja, uma matriz com duas linhas e quatro colunas.

Existem casos em que a multiplicação não é possível devido à incompatibilidade das dimensões das matrizes envolvidas. Se tentarmos multiplicar A_{2X3} por B_{2X4}, a operação é impossível, pois o número de colunas de A (três) não é igual ao número de linhas de B (duas).

A multiplicação de matrizes é uma sequência sistemática de operações aplicada aos elementos de duas matrizes. Para multiplicar uma matriz A por uma matriz B, cada coluna de B é multiplicada, elemento por elemento, pelas linhas de A, e os produtos resultantes são somados para obter os elementos correspondentes da matriz produto C, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot -1) & (2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0) \\ (3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot -1) & (3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0) \end{bmatrix}$$

Generalizando, obtemos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}) & (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32}) \\ (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31}) & (a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32}) \end{bmatrix}$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

2.6.4.3 Divisão

Tecnicamente, não se faz divisão de matrizes. A operação equivalente da “divisão” de uma matriz A por uma matriz B é a multiplicação de A pela inversa de B.

Exemplo: Dada as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Para “dividir”A por B é necessário obter o produto A x B^{-1}. Logo, é preciso calcular B^{-1}:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,7 \\ -0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Por fim, é calculado o produto $A \times B^{-1}$:

$$A \times B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 & -0,7 \\ -0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 0,6 + 2 \times (-0,2) & 1 \times (-0,7) + 2 \times 0,4 \\ 3 \times 0,6 + 4 \times (-0,2) & 3 \times (-0,7) + 4 \times 0,4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,6 - 0,4 & -0,7 + 0,8 \\ 1,8 + 0,8 & -2,1 + 1,6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 2,6 & -0,5 \end{bmatrix}$$

2.7 Retas

Em geometria, uma reta é um objeto geométrico unidimensional que se estende infinitamente em ambas as direções. Ela não tem largura nem

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

profundidade, apenas comprimento. As retas são normalmente definidas por dois pontos distintos por onde passam, ou por um ponto e uma direção.

2.7.1 Propriedades

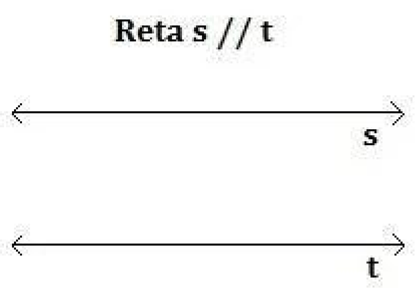
- As retas são infinitas;
- São unidimensionais, ou seja, possui apenas uma dimensão;
- O conjunto dos pontos são infinitos;
- No plano, elas podem ser dispostas na horizontal, vertical e de forma inclinada.

2.7.2 Posição da reta

No espaço, existem diversas maneiras dos elementos geométricos se posicionarem entre si. Veja a seguir quais são elas:

2.7.2.1 Retas Paralelas

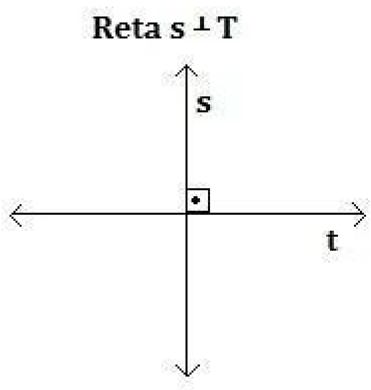
Não existe ponto em comum entre as retas, ou seja, elas estão posicionadas uma ao lado da outra e sempre no mesmo sentido (vertical, horizontal ou inclinada).



2.7.2.2 Retas Perpendiculares

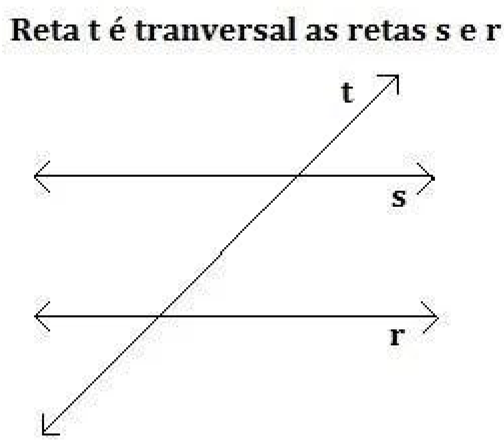
Retas perpendiculares possuem um ponto em comum, o qual forma um ângulo reto (90°).

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589



2.7.2.3 Retas Transversais

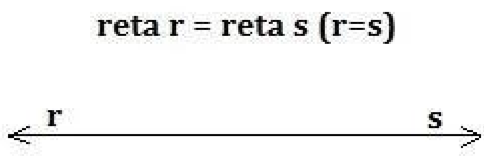
Retas que são transversais às outras retas. É definida como uma reta que possui interseção com as outras retas em pontos diferentes.



2.7.2.4 Retas Coincidentes

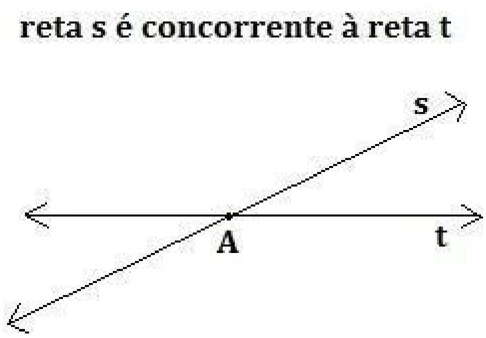
Diferente das retas perpendiculares, as retas coincidentes possuem todos os pontos em comum.

Rod. Washington Luiz (SP-310) km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589



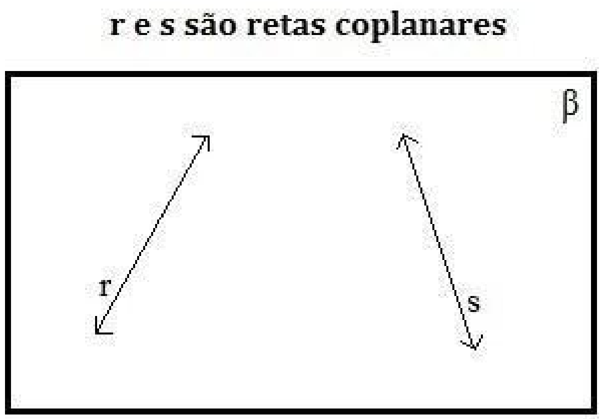
2.7.2.5 Retas Concorrentes

Retas concorrentes são duas retas que se encontram em um determinado ponto, chamado de ponto de interseção. Os ângulos formados por retas concorrentes podem variar e não são necessariamente suplementares (180°).



2.7.2.6 Retas Coplanares

Retas coplanares são aquelas que estão presentes no mesmo plano no espaço. Na figura abaixo ambas pertencem ao plano β.



2.7.2.7 Retas Reversas

Diferente das retas coplanares, esse tipo de reta está presente em planos distintos, portanto não tem nenhum ponto em comum.

2.8 Equações da reta

2.8.1 Equação Geral

Uma reta representada no plano cartesiano possui uma equação, chamada equação geral da reta, e pode ser escrita da seguinte forma:

$$ax + by + c = 0$$

Onde:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

- a, b e c: são conhecidos e constantes, sendo a e b coeficientes das incógnitas x e y, respectivamente, e c o termo independente da equação;

- x e y: são as coordenadas do plano cartesiano em um ponto P qualquer, P(x, y).

2.8.1.1 Cálculo da Equação Geral da Reta

Dados dois pontos pertencentes a uma reta, podemos calcular a equação dessa reta através de um determinante, já que dois pontos definem uma reta:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Onde:

- x e y são coordenadas genéricas;
- xa e ya são coordenadas de um ponto A da reta;
- xb e yb são coordenadas de um ponto B da reta;

Assim, resolvendo esse determinante, obtemos a equação da reta.

Exemplo: Encontre uma equação geral da reta que passa pelos pontos A (-1,8) e B (-5,-1).

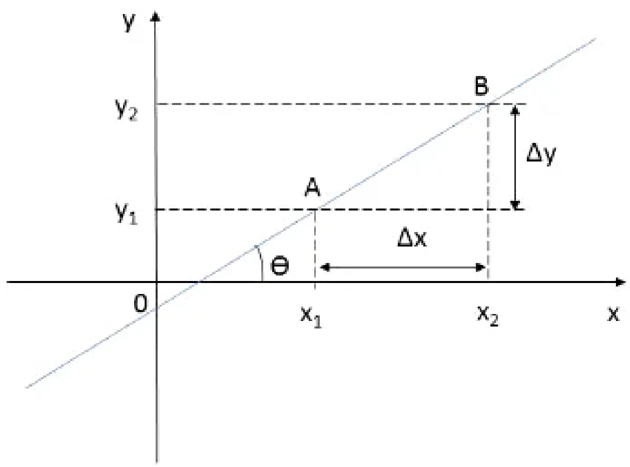
O determinante toma a seguinte forma: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Resolvendo o determinante, a equação geral resulta em 9x - 4y + 41 = 0

2.8.1.2 Coeficiente Angular

Outra maneira de determinar a equação da reta é através de um dos seus pontos e a sua inclinação, ou seja, seu coeficiente angular, em relação ao eixos das abscissas (eixo Ox).

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589



Vale lembrar que o coeficiente angular da reta é o valor da tangente do ângulo que esta faz com o eixo x (m= tg Θ). Logo, o coeficiente angular de uma reta pode ser calculado por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Assim, dado um ponto qualquer da reta e o valor de m, podemos encontrar a equação da reta pela seguinte expressão:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Exemplo: Determine a equação da reta que passa pelo ponto A (2,4) e tem coeficiente angular (m) 3.

Logo, - 4 = 3 . (x - 2) → y - 4 = 3x - 6 → 3x - y - 2 = 0

2.8.2 Equação Reduzida

Uma reta quando representada no plano cartesiano que passa pelo ponto P(0, n), com coeficiente angular m, possui uma equação, chamada equação reduzida da reta. Esta equação, pode ser escrita da seguinte forma:

$$y = mx + n$$

Onde:

- x e y: são as coordenadas do plano cartesiano;
- m: é o coeficiente angular (inclinação em relação ao eixo x);
- n: é o coeficiente linear (ponto onde a reta corta o eixo y);

Exemplo: Considerando uma reta que passa por P (2,7) e Q (-1,-5), encontra a forma reduzida da reta (y= mx + n):

Substituindo os valores de P e Q na equação, temos: 2m + q = 7 (equação I) e m - q = 5 (equação II), respectivamente.

Logo, substituindo 2m + q = 7 → q = 7 - 2m na equação II, temos:

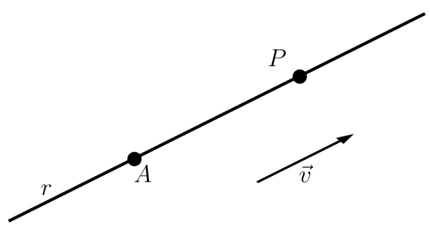
m - (7 - 2m) = 5 → m - 7 + 2m = 5 → 3m = 12 → m = 4

Colocando o valor de m na equação II: 4 - q = 5 → q = -1

Portanto, a equação reduzida é y = 4.x -1

2.8.3 Equação Vetorial

Dois pontos A e P, definem um único vetor $\vec{v} = \vec{AP}$, que representa uma direção. Todo ponto R, cuja direção AR seja a mesma de AP, ou seja, do vetor $\vec{v}$, chamado de vetor diretor , está contido na mesma reta r definida pelos pontos A e P.



Portanto, podemos definir a equação vetorial da reta r sendo:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$R = P + t.\vec{v}$, que é o mesmo que $\vec{AR} = t.\vec{AP}$

onde, $\vec{v}$ é o vetor diretor da reta r e t é um número real, parâmetro (variável) da equação.

Observe que para obtermos uma equação vetorial de uma dada reta, podemos escolher qualquer ponto A ∈ r e qualquer vetor $\vec{v}$ // r, $\vec{v} \neq \vec{0}$.

2.8.4 Equação Paramétrica

As equações paramétricas são formas de representar as retas através de um parâmetro t, uma variável que irá fazer a ligação entre equações que pertencem a uma mesma reta.

Tomamos a equação vetorial de uma reta qualquer:

$$R = P + t.\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

Realizamos as operações indicadas no lado direito da equação:

$$(x, y, z) = (x_1 + ta, y_1 + tb, z_1 + tc)$$

Pela condição de igualdade entre pontos e vetores, temos:

$$\begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \quad com\ t \in R \\ z = z_1 + tc \end{cases}$$

que são as equações paramétricas de uma reta r qualquer

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

2.9 Ortogonalidade e Paralelismo

2.9.1 Paralelismo entre Vetores

Tendo dois vetores u = (x_1,y_1) e v = (x_2,y_2), estes dois vetores são paralelos u//v (ou colineares), desde que exista uma constante de proporcionalidade (K), onde:

u = K * v ou (x_1,y_1) = K * (x_2, y_2)

O que Implica que:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k$$

Exemplo: Os vetores (-2,4) e (-1, 2) são paralelos?

Sabemos que se x1/x2 = y1/y2 = k, então SIM, pois nesse caso existe uma constante entre os vetores:

$$\frac{-2}{-1} = \frac{4}{2} = 2$$

Dessa forma, é possível constatar que um vetor é múltiplo do outro e a constante K = 2

2.9.2 Ortogonalidade entre Vetores

Dois vetores são considerados ortogonais ($\perp$) quando o ângulo entre os mesmos é 90°, ou seja, um ângulo reto, de tal forma que o cos (∅) = 0, sendo ∅ o ângulo entre eles. Logo:

$u * v = 0$, ou seja, $x_1 * x_2 + y_1 * y_2 = 0$

Exemplo: Os vetores (-2,4) e (2,1) são ortogonais?

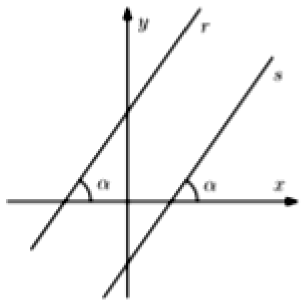
Sabemos que se u * v = 0, então sim.

Nesse caso: (-2, 4) * (2, 1) = $(-2 * 2) + (4 * 1) = -4 + 4 = 0$
Dessa forma, é possível concluir que um é perpendicular ao outro.

2.9.3 Paralelismo entre Retas

Duas retas são paralelas quando a constante que multiplica o vetor diretor das retas é a mesma. Ou seja, quando elas apresentam a mesma inclinação em relação ao eixo x (o mesmo coeficiente angular).

$$r // s \leftrightarrow m_r = m_s$$



Caso o coeficiente angular delas sejam diferentes, elas serão concorrentes.

Exemplo: *As retas* $y = 6x - 1$ e $18x - 4 - 3y = 0$ *são paralelas?*

Sabemos que elas devem ter o mesmo coeficiente angular para serem paralelas. Nesse caso:

$$18x - 4 - 3y = 0 \quad \rightarrow \quad 18x - 4 = 3y \quad \rightarrow \quad y = 6x - \frac{4}{3}$$

Temos então $y = 6x - 1$ e $y = 6x - \frac{4}{3}$

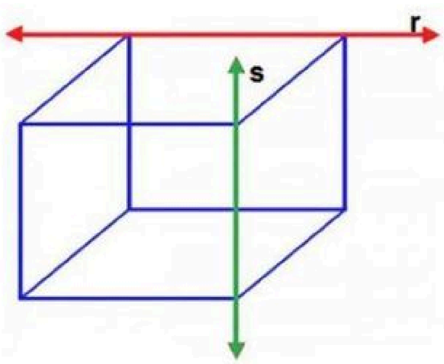
Como o coeficiente angular de ambas é 6, temos que as retas são paralelas. Temos ainda que o coeficiente linear delas é distinto (-1 e -$\frac{4}{3}$), logo estão são

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

retas paralelas distintas, caso o coeficiente linear fosse o mesmo elas seriam retas paralelas coincidentes.

2.9.4 Ortogonalidade entre Retas

Caso duas retas não sejam paralelas, elas devem ser concorrentes, isto é, se encontrar em algum ponto. Se o ângulo entre duas retas concorrentes for reto (90°) e elas não se interceptarem, então essas serão retas concorrentes ortogonais. Caso contrário, elas serão perpendiculares ($mr.ms =- 1$)



2.9.5 Paralelismo entre Planos

Dois planos, a e b, serão paralelos caso o vetor normal a cada plano (Na e Nb) sejam paralelos entre si, ou seja, caso o vetor normal destes sejam múltiplos.

Ainda neste quesito, se estes planos tiverem retas normais paralelas e um ponto em comum, eles serão coincidentes.

Exemplo: imagine os planos:

$$a1:\ (x, y, z) = (1, 2, 3) + a(-1, 1, -2) + b(1, -1, 3)$$

$$b1:\ (x, y, z) = (2, 1, 8) + c(2, -2, 4) + d(4, -4, 12)$$

A normal de a1 será:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$$Na1 = (-1,1,-2)\,x\,(1,-1,3) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = (1,1,0)$$

A normal de b1 será:

$$Nb1 = (2,-2,4)\ x\ (4,-4,12) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix} = (-8,-8,0)$$

Ou seja, como Nb1=-8.Nb2, estes vetores têm a mesma direção e os planos a1 e b1 são paralelos.

Além do mais, se pegarmos um ponto de a1, como (1,2,3) e substituirmos na fórmula de b1, encontraremos um sistema:

$$b1:\ (1,2,3) = (2,1,8) + c(2,-2,4) + d(4,-4,12)$$

$$1 = 2 + 2c + 4d$$

$$2 = 1 - 2c - 4d$$

$$3 = 8 + 4c + 12d$$

Esse sistema tem solução em que c = 1 e d = -¾, desta forma, (1,2,3) existe em a1 e em b1, logo, além de paralelos eles são coincidentes. Se o sistema não tivesse solução eles seriam somente paralelos.

2.9.6 Ortogonalidade entre Planos

Quando dois planos não são paralelos, eles são concorrentes ou concorrentes ortogonais. No caso de planos concorrentes, os vetores normais aos planos não são múltiplos, isto é, não apresentam uma relação entre eles. Já no caso dos planos concorrentes ortogonais, a multiplicação do vetor normal de um plano pelo vetor normal de outro plano resulta em 0.

Exemplo: Verifique se os planos a1 e c1 a seguir são concorrentes ou concorrentes ortogonais.

$$a1:\ (x, y, z) = (1, 2, 3) + a(-1, 1, -2) + b(1, -1, 3)$$

$$c1:\ -2x + 2y + 3z - 1 = 0$$

A partir da análise da equação dos planos, é notável que o vetor normal do plano a1 e c1 são, respectivamente: Na1 = (1,1,0) e Nc1 = (-2,2,3).

Além disso, é notável que não há relação entre os vetores diretores, portanto os planos não são paralelos.

$$(1, 1, 0)\, x\, (-2, 2, 3) = (1\, x\ -2) + (1\, x\, 2) + (0\, x\, 3) = -2 + 2 + 0 = 0$$

Como o produto entre os vetores normais aos planos é 0, estes planos são concorrentes ortogonais.

3. CÁLCULO

No capítulo de Cálculo, serão abordados os três principais conceitos dessa matéria, que irá te acompanhar em praticamente todo o curso: limite, derivada e integral. No final, perceberá como todos os três assuntos estão relacionados.

3.1 Limite

O limite é o estudo do comportamento de uma função f(x) quando x tende à p:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

Lê-se: Limite de f(x) quando x tende à p.

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Se a função for contínua, o limite no ponto estudado será a própria função aplicada ao ponto:

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Exemplos:

a) $\lim_{x \to 2} (x - 1)$

Nota-se que $(x - 1)$ é uma função polinomial e, portanto, é contínua.
Então: $\lim_{x \to 2} (x - 1) = 2 - 1 = 1$

b) Se f(x) = {1, se x = 0; x^2, se x ≠ 0, qual o limite de f(x) quando x tende à 0?

Ao esboçar o gráfico dessa função, é possível notar que ela não é contínua (tentar colocar print da função). Podemos observar isso também ao resolver o limite:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0, \, entretanto \, f(0) = 1$$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$

Como a função f(x) é uma função racional, ela também é contínua, entretanto, se apenas substituirmos o valor de x na equação, nosso resultado será $\frac{0}{0}$, que é uma indeterminação, dessa forma, é necessário manipular a função:

$$\frac{X^2-3x+2}{x-2} = \frac{(x^2-x)+(-2x+2)}{x-2} = \frac{x(x-1)-2(x-1)}{x-2} = \frac{(x-1)\,.\,(x-2)}{x-2} = x - 1$$

Portanto:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x \to 2} x - 1 = 2 - 1 = 1$$

3.1.1 Propriedades Aritméticas do Limite

Se $\lim_{x \to a} f(x) = P$ e $\lim_{x \to a} g(x) = T$, então:

I. $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = P + T$

II. $\lim_{x \to a} (f(x) \,.\, g(x)) = P \,.\, T$

III. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{P}{T}$, desde que T ≠ 0

3.1.2 Limites Laterais

Os limites laterais são utilizados quando queremos verificar a existência ou não do limite em um certo ponto da função.

Um limite existe em um certo ponto da função se:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Se o limite de f(x) de x tendendo à esquerda (a^-) for diferente do limite de f(x) de x tendendo à direita (a^+), significa que não existe limite no ponto a.

Exemplo: Se f(x) = $\frac{x}{|x|}$, $se\ x \neq 0;\ 0,\ se\ x = 0$, qual o limite de f(x) quando x tende à 0?

Cálculo do limite pela esquerda:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to 0^-} -1 =-1$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Cálculo do limite pela direita:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

Nesse sentido, de acordo com a definição, como os limites laterais são diferentes, não existe limite no ponto 0, o que também faz a função ser descontínua nesse ponto.

Observação: A função f(x) será contínua em um determinado ponto se, e somente se, os limites laterais de f(x) no ponto p forem iguais e tiverem o mesmo valor da função aplicada ao ponto ($\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$).

3.1.3 Noções de Limites Infinitos

Temos que $\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x} = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{a}{x} = 0$ para qualquer valor de a ∈ R, ou seja, quando x tende ao infinito (positivo ou negativo) e está no denominador de uma fração, essa fração terá valor zero por estarmos dividindo um número por algo muito grande.

Exemplo:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x-2}{3x^2+1}$

Sabemos que $\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x} = 0$, então, podemos colocar x^2 em evidência para que esse tipo de fração apareça:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x-2}{3x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} x^2 \frac{\frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{0-0}{3+0} = 0$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Temos também que $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, ou seja, quando x tende a zero pela direita $(x \to 0^+)$ ou por valores maiores que zero, o limite é infinito, e quando tende pela esquerda $(x \to 0^-)$ ou por valores menores que 0, o limite é menos infinito.

Logo, se:

I. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, então:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} (f(x) \,.\, g(x)) = +\infty$$

II. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, então:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} (f(x) \,.\, g(x)) = +\infty$$

III. Se $\lim_{x \to a} f(x) = P$ e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, então:

$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} (f(x) \,.\, g(x)) = +\infty$, se L > 0; $-\infty$, se L < 0

IV. Se $\lim_{x \to a} f(x) = P$ e $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, então:

$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} (f(x) \,.\, g(x)) = -\infty$, se L > 0; $+\infty$, se L < 0

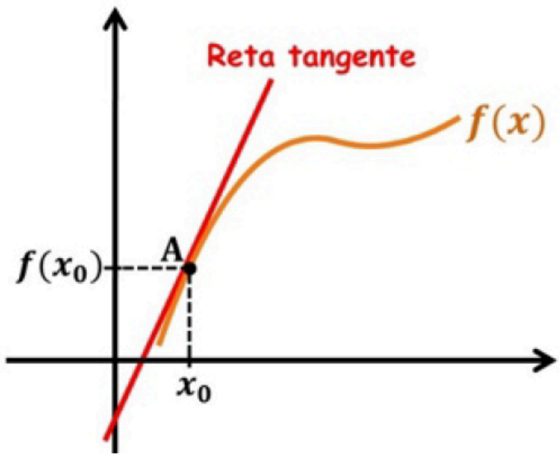
Resumindo:

$+\infty + (+\infty) = +\infty$;	$+\infty \,.\, (+\infty) = +\infty$;
$-\infty + (-\infty) = -\infty$;	$-\infty \,.\, (-\infty) = +\infty$;
$+\infty + L = +\infty$;	$-\infty + L = -\infty$;
$+\infty \,.\, L = +\infty$, se L > 0; $-\infty$, se L < 0	$-\infty \,.\, L = -\infty$, se L > 0; $+\infty$, se L < 0

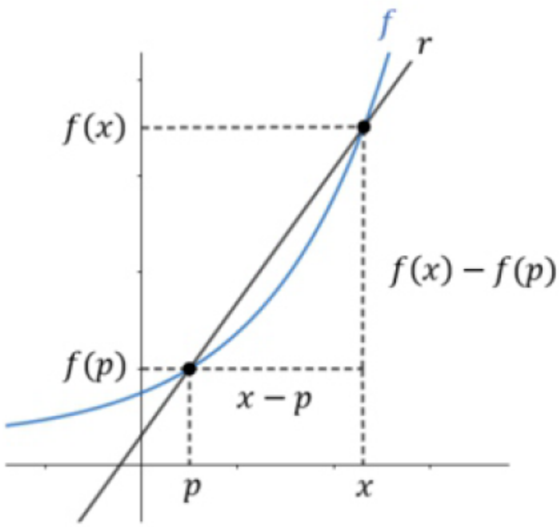
PET Engenharia Civil
Departamento de Engenharia Civil
Universidade Federal de São Carlos
Rod. Washington Luiz (SP-310)
km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589

3.2 Derivada

A derivada de uma função em um ponto representa a inclinação (ou coeficiente angular) da reta tangente à curva na função no ponto em questão. De forma mais simplificada, sendo uma função $y = f(x)$, a derivada no ponto A é dada através do coeficiente angular da reta tangente.



Suponhamos que desejamos conhecer a derivada no ponto p:



Para calcular o coeficiente angular (m) da reta r, basta utilizarmos o conceito de tangente geométrica. Sendo assim:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$$m = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

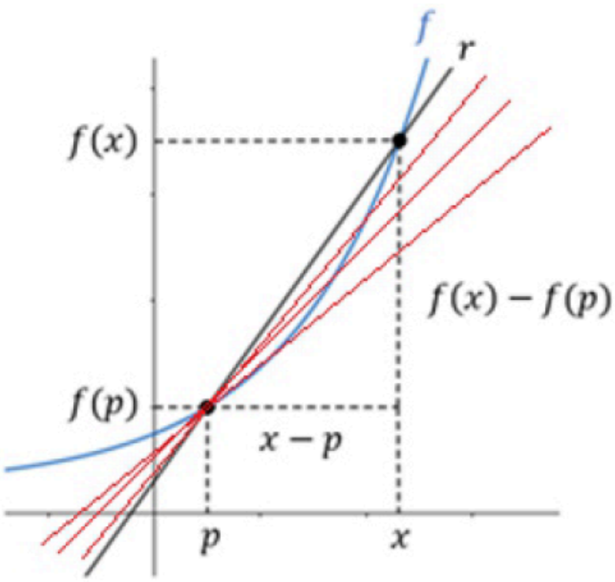
$$\Delta x = x - p$$

$$x = \Delta x + p$$

$$m = \frac{f(\Delta x + p) - f(p)}{\Delta x}$$

Conforme o valor de Δx se aproxima de 0, ou seja, quanto mais próximo o ponto x for do ponto p, a reta se torna mais próxima à tangente no ponto em questão. Dessa forma, a inclinação da reta tangente à curva no ponto p, ou $f'(p)$, pode ser dada pela seguinte equação:

$$f'(p) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + p) - f(p)}{\Delta x}$$



Exemplos:

a) Calcule $f'(x)$ pela definição, dada $f(x) = x^2 + x$ no ponto $x = 1$.

$$f'(p) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + p) - f(p)}{\Delta x}$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$f(x) = x^2 + x$

$f(\Delta x + x) = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) \Rightarrow f(\Delta x + x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + x + \Delta x$

$f(\Delta x + x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + x + \Delta x - x^2 - x \Rightarrow$

$f(\Delta x + x) - f(x) = 2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x$

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x}$

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(1) = 3$

b) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 6x + 8$ no ponto $(x1, y1)$.

A inclinação da reta tangente no ponto $(x1, y1)$ é a derivada da função y em relação a x no ponto $x1$. Logo, temos que:

$f'(x1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x1) - f(x1)}{\Delta x}$

$f(\Delta x + x1) = (\Delta x + x1)^2 - 6(\Delta x + x1) + 8 \Rightarrow$

$f(\Delta x + x1) = x1^2 + 2x1\Delta x + \Delta x^2 - 6x1 - 6\Delta x + 8$

$f(x1) = x1^2 - 6x1 + 8$

$f(\Delta x + x1) - f(x1) = x1^2 + 2x1\Delta x + \Delta x^2 - 6x1 - 6\Delta x + 8 - x1^2 + 6x1 - 8 \Rightarrow$

$f(\Delta x + x1) - f(x1) = 2x1\Delta x + \Delta x^2 - 6\Delta x$

$f'(x1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x1\Delta x + \Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x}$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$$f'(x1) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x1 + \Delta x - 6 \Rightarrow f'(x1) = 2x1 - 6$$

3.2.1 Principais Derivadas

Apesar da derivação por definição apresentar uma certa complexidade, existem derivadas já conhecidas, e são elas:

Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$
x^c	$c \cdot x^{c-1}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$sen(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-\ sen(x)$
$tg(x)$	$sec^2(x)$
$sec(x)$	$tg(x) \cdot sec(x)$
$arcsen(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Exemplos:

a) Sendo $f'(x) = e^x + 2x^3 - sen(x)$, determine $f'(0)$.

$$f'(x) = e^x + 3 \cdot 2x^{3-1} - cos(x) \Rightarrow f'(x) = e^x + 6x^2 - cos(x) \Rightarrow$$

$$f'(0) = e^0 + 6(0)^2 - cos(0) \Rightarrow 1 + 0 - 1 \Rightarrow f'(0) = 0$$

b) Encontre $\frac{dy}{dx}$ para a função $y = 3x^4 + 2\sqrt{x} - 3ln(x) - cos(x) + 4$.

$$y = 3x^4 + 2\sqrt{x} - 3ln(x) - cos(x) + 4 \Rightarrow$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

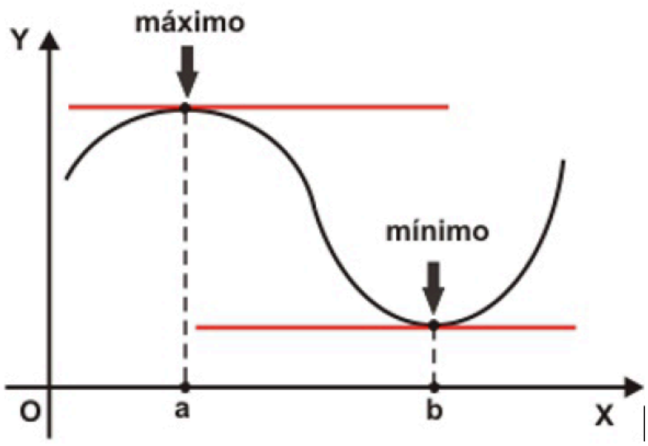
$$y = 3x^4 + 2x^{1/2} - 3ln(x) - cos(x) + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot 3x^{4-1} + \frac{2 \cdot 1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{3 \cdot 1}{x} - (-\ sen(x)) + 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} + sen(x)$$

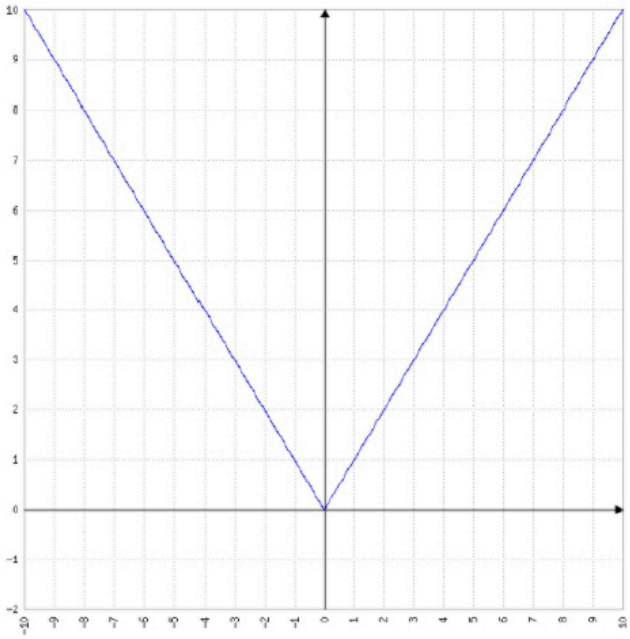
3.2.2 Utilização da derivada

Na engenharia, as derivadas são muito utilizadas, principalmente quando se deseja conhecer máximos e mínimos de funções. Isso porque é possível encontrar pontos críticos da função igualando sua derivada a 0, já que a inclinação da reta tangente nesses pontos deve ser 0.



Vale ressaltar que para determinar os pontos máximos e mínimos absolutos de uma função, não basta igualar a derivada da função a 0, pois existem outras verificações que devem ser feitas. De modo geral, nem todo ponto que a derivada se iguala a 0 é ponto máximo ou mínimo absoluto, mas todo ponto máximo, tanto relativos quanto absolutos, possuem derivada igual a 0 ou inexistente. Como o caso da função $y = |x|$, que pode ser vista a seguir.

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589



Além disso, as derivadas são utilizadas nos mais diversos âmbitos. Na física, por exemplo, a função da aceleração instantânea de uma partícula é a derivada da função velocidade, que por sua vez, é a derivada da função do espaço.

3.2.3 Regra de L'Hôpital

No cálculo de alguns limites, é frequente nos deparamos com indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Para o cálculo de limites que se enquadram nesse tipo de indeterminação, podemos usar a regra de L'Hôpital, que utiliza o conceito de derivação.

Atenção: As regras de L'Hopital não serão reconhecidas como respostas de limite nas provas iniciais da disciplina de Cálculo 1. Apesar disso, essas regras nos ajudam a conferir respostas de limites que tenhamos chegado através de outros métodos.

A regra de L'Hôpital diz:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis, se $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = \infty$, então: $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemplos:

a) Calcule $\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{3x^2+2x}$.

Como podemos observar, o limite apresenta uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, possibilitando a utilização de L'Hôpital. Portanto:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{3x^2+2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(4x)'}{(3x^2+2x)'} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{3x^2+2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{6x+2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{3x^2+2x} = 0.$$

b) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{3x}$.

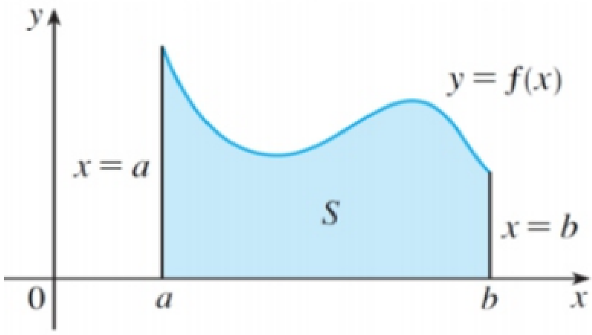
Como podemos observar, o limite apresenta uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, possibilitando a utilização de L'Hôpital. Portanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x-1)'}{(3x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{3x} = \frac{1}{3}$$

3.3 Integral

A melhor forma de visualizar o conceito de integral é pensando na solução do problema do cálculo de uma área sob um gráfico de uma função.

Rod. Washington Luiz (SP-310) km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589

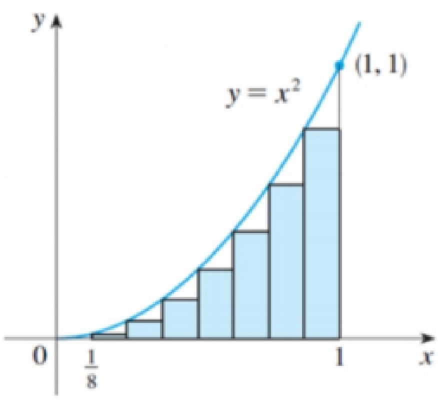


Como encontrar a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$ do intervalo a até b?

$$S = \{(x, y)|\ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Isso significa que S, ilustrado acima, está limitado pelo gráfico de uma função contínua f (onde $f(x) \geq 0$), pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$.

As fórmulas decoradas no ensino médio, não abrangem esse tipo de área e, além disso, seria impossível decorar uma fórmula para cada tipo de função. Portanto, para resolver este problema, usa-se a ideia de preencher toda a área embaixo da curva com pequenos retângulos, que é uma figura mais simples de se calcular a área ($Área_{retângulo} = base \times altura$).



De acordo com o exemplo acima, a área almejada foi dividida em oito retângulos de mesma largura, neste caso $\frac{1}{8}$. Mas, para calcular um valor mais

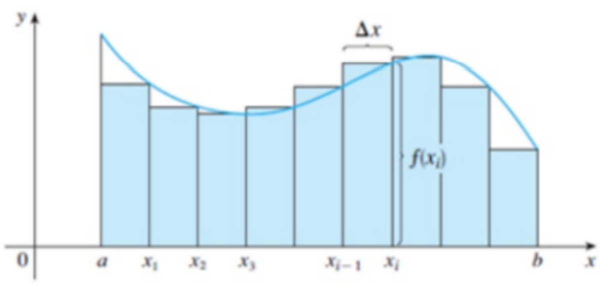
ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

próximo do real de S, devemos diminuir o máximo que pudermos da largura desse retângulo, e consequentemente, aumentando a quantidade de retângulos necessários para preencher a área.

Como mostrado acima, temos n=10, n=30 e n=50, respectivamente à cada figura.

Portanto, para maior exatidão, podemos utilizar o conceito de limite, dividindo a região em cada vez mais retângulos, de modo que o n tenda ao infinito.

Generalizando, teremos que a área A de qualquer região S sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos.



$$A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ ... \ + f(x_n)\Delta x] = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)dx$$

Sendo Δx a largura dos retângulos, ou seja, $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Se este limite existir, e, além disso, gerar o mesmo resultado para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais (ponto da função que se utiliza como altura do retângulo), dizemos que f é integrável em [a,b]. Então a integral de f de a à b é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)dx$$

3.3.1 Notação

A integral é escrita como:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Sendo:

f(x) - integrando

a e b - limites de integração, sendo a o limite inferior e b o limite superior

dx - indicação da variável dependente, no caso o x

Quando a integral apresenta os limites de integração para ser calculada, esta é chamada integral definida e o seu resultado é um valor:

$$\int_a^b f(x)dx = d$$

Já quando não se apresenta os limites de integração, esta é uma integral indefinida e resulta em uma função. Cabe destacar que nesse caso, sempre é necessário adicionar uma constante a cada integração.

$$\int f(x)dx = g(x) + d$$

3.3.2 Princípio do Teorema Fundamental do Cálculo

O Princípio Fundamental do Cálculo é chamado assim, pois estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. Ramos estes que surgiram de problemas aparentemente não relacionados: o problema da tangente e o da área, respectivamente. Mas, na verdade, estão estritamente relacionados, já que, como a subtração e a soma, a integração e a derivada, são processos inversos.

Como estamos em um material de nivelamento, não é conveniente explicar todas as particularidades deste teorema, porém, com isso já é possível entender o objetivo dessa ferramenta, descobrir para que é utilizada e servir de base para os conteúdos mais aprofundados. O mais importante em se ter em mente no momento, é basicamente o seguinte:

$$\int f(x)dx = F(x)$$

De modo que F(x) é chamada de primitiva de f(x), logo:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

3.3.3 Propriedade das Integrais

A seguir, têm-se algumas das propriedades das integrais que podem ser utilizadas para facilitar as contas. Considere c uma constante qualquer e $f(x)$ e $g(x)$ integráveis:

I. $$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

II. $$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

III. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

IV. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$

V. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

VI. Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$ então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

VII. Se $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$ então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

3.3.4 Integração de funções polinomiais

Pensando na relação entre integral e derivada apresentada anteriormente, e, também lembrando que toda vez que você deriva um polinômio através da “regra do tombo”, você diminui o grau do mesmo. Por isso, faz sentido afirmar que toda vez que integra-se um polinômio, aumentará o grau dele.

Na prática, teremos:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Exemplos:

1. $\int [x^3 + x^{23}]dx = \int x^3 dx + \int x^{23} dx = \frac{x^4}{4} + c_1 + \frac{x^{24}}{24} + c_2 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^{24}}{24} + c$

No primeiro passo desse exemplo, foi utilizada a forma para integral indefinida da propriedade II. Em seguida, foi utilizada a regra para se integrar polinômios e cabe destacar que ao final, pode-se representar as constantes em uma só.

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

2. $\int_{3}^{4} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{3}^{4} = \frac{4^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{64-27}{3} = \frac{37}{3}$

Neste caso, primeiramente resolveu-se a integral pela definição e depois aplicou-se os limites de integração. Cabe destacar que como é uma integral definida, não é necessário incluir uma constante.

3.3.5 Outras Integrais Importantes

Lista-se, a seguir, outras integrais básicas importantes de se ter como cartas na manga, pois sempre aparecem, lembrando que também é possível verificar estas a partir da derivação.

- **Exponencial e logaritmo:**

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

- **Trigonométricas:**

$$\int sen(x)dx = - cos(x) + c$$

$$\int cos(x)dx = sen(x) + c$$

$$\int sen^2(x)dx = tan(x) + c$$

$$\int cossec^2(x)dx = - cotan(x) + c$$

$$\int sec(x) \cdot tan(x)dx = sec(x) + c$$

$$\int cossec(x) \cdot cotan(x)dx = - cossec(x) + c$$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = arctan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen(x) + c$$

Exemplo: $\int [x^4 + \frac{1}{x} - e^x]dx = \int x^4 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int e^x dx = \frac{x^5}{5} + ln|x| - e^x + c$

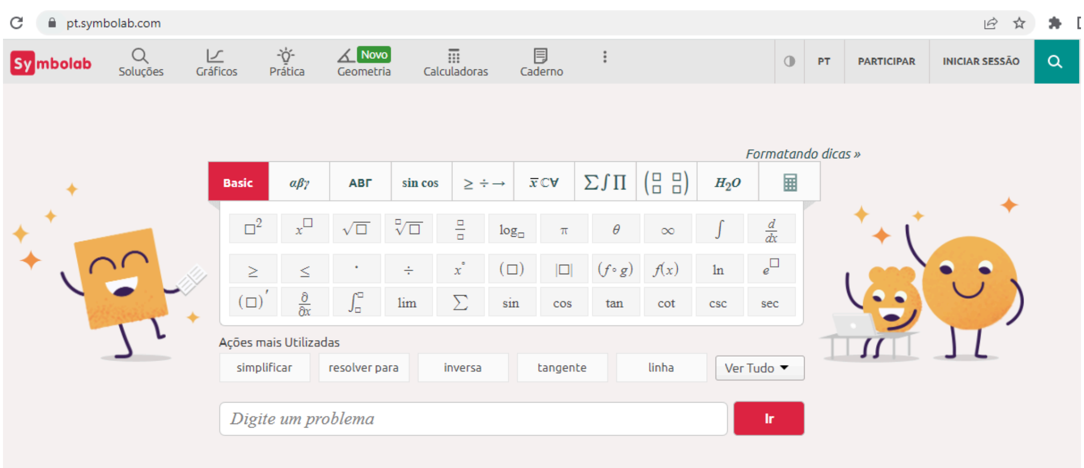
No primeiro passo, foi utilizada a forma para integral indefinida da propriedade II e da propriedade III. Em seguida, foi utilizada a regra para se integrar polinômios, exponencial e logaritmo apresentadas nessa seção.

4. BÔNUS

Agora que você já viu tudo, podemos te mostrar dicas valiosas! Existem sites na internet que nos auxiliam com as contas e a visualização de gráficos.

4.1 Symbolab

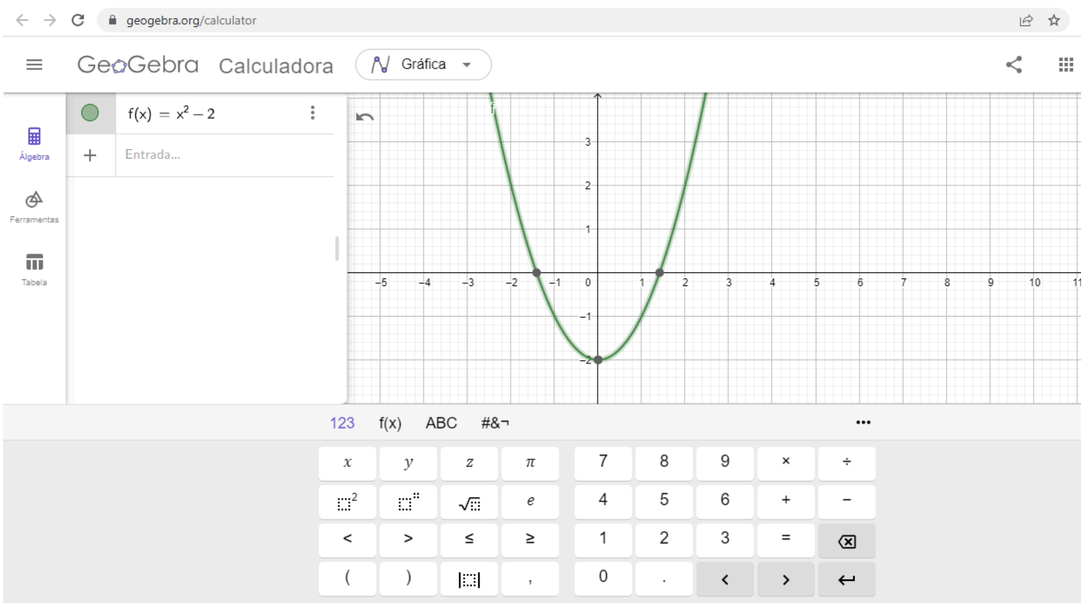
É um site que é como uma calculadora digital, nele há diversas opções, podemos calcular desde matrizes até integrais mais complexas. A versão gratuita dele já dá conta do recado e vale a pena explorar todas as suas funcionalidades.



Link: Symbolab

4.2 Geogebra

É um site do próprio Google que é possível visualizar diversas coisas, como por exemplo gráficos de funções, tanto afins quanto polinomiais, também podemos entrar na função 3D, quando estamos lidando com funções do R^3. Isso pode te ajudar, e muito, com a visualização gráfica. Navegue pelo site e descubra as diversas ferramentas que ele possui.



Link: GeoGebra

Esses foram dois dos mais conhecidos e úteis, mas você pode descobrir outros, como por exemplo o "desmos" que é bem parecido com o symbolab, os aplicativos "mathway" e "photomath" que funcionam com o mesmo objetivo, sendo que o "photomath", diferente dos citados anteriormente, te permite fotografar o exercício a ser resolvido. Ademais, todos apresentam uma interface intuitiva que busca, da maneira mais fácil, te auxiliar em seu aprendizado.

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

AGRADECIMENTOS

É isso pessoal, esperamos muito que esse conteúdo tenha ajudado você de alguma forma! Essa apostila foi desenvolvida com muito carinho pelo grupo PET Civil UFSCar, se você gostou pelo menos um pouquinho dela, conheça mais do nosso trabalho e nossas outras atividades no nosso instagram: @petcivilufscar.

Até mais!

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

LISTA DE EXERCÍCIOS

Inequações

1. Resolva os exercícios a seguir, sabendo que as inequações são simultâneas.

a) $3x + 2 \geq 5x - 2$; $4x - 1 > 3x - 4$ e $-2x < x - 6$

b) $x - 3 \geq 0$ e $x^2 - 5x - 6 < 0$

c) $x^2 - 2x + 8 \leq 8$ e $x^2 - 2x + 8 > 3$

2. Resolva os exercícios a seguir, usando os conceitos de inequação produto.

a) $(x - 2)(1 - 2x) \leq 0$

b) $(3x - 2)(x + 1)(3 - x) < 0$

c) $(-x + 1)(x^2 - x + 5)(x^2 - 4) \leq 0$

3. Resolva os exercícios a seguir usando os conceitos de inequação quociente.

a) $\frac{(3x+4)}{(1-x)} \geq 2$

b) $\frac{(x^2-8x+12)}{(x^2-16)} \leq 0$

4. A função $f(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{x^2+x-2}}$ tem como domínio qual conjunto solução?

Fatoração

1. Fatore as seguintes expressões:

a) $5ab^2 + 10a^2b^2 - 15a^3b^4$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

b) $2ac - 2ad + bc - bd$

c) $4x^4 - 16x^3y + 16x^2y^2$

d) $5x^3 - 5y^3$

2. Se a e b são números reais inteiros positivos tais que $a - b = 7$ e $a^2b - ab^2 = 210$ qual o valor de ab?

3. Simplifique a seguinte expressão $y = \frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$

4. Simplifique a seguinte expressão $y = \frac{x^3-4x^2-4x+16}{x^2-6x+8}$

Observação: $x \neq 2$ e $x \neq 4$

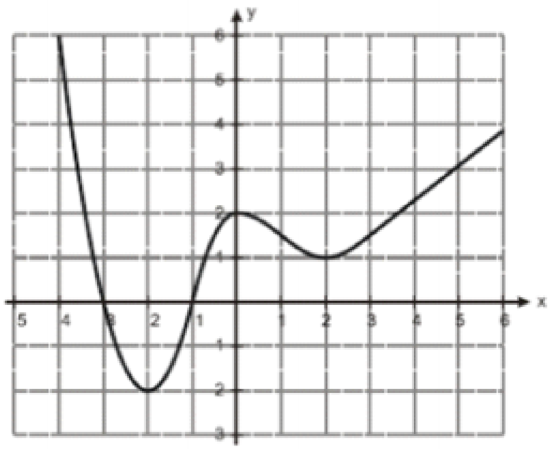
Módulo

1. Resolva as equações:

a. $x^2 + 3|x| - 18 = 0$
b. $|2x - 7| = |x + 4|$
c. $|x + 1| = 2x - 6$

2. Mostre como ficaria o gráfico da equação $f(x) = | - x + 1|$.

3. A figura abaixo mostra o gráfico da função f(x).



O número de elementos do conjunto solução da equação $|f(x)| = 1$, resolvida em R é igual a:

a) 6
b) 5
c) 4
d) 3

4. Faça um esboço do gráfico da equação $f(x) = |x + 2|| - 2|$.

5. A soma das raízes distintas da equação $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|$ é?

6. Qual é a soma das raízes distintas da equação $|x - 2|| - 2| = 2$?

7. Resolva a seguinte inequação $|x - 1| + |x - 3| < |4x|$.

Logaritmo

1. Determine os seguintes logaritmos:

a) $log2(128)$

b) $log\sqrt{3}(27)$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

c) $log\frac{1}{25}(5\sqrt{5})$

d) $log25(0,005)$

2. Calcule:

$$A = log2(log3(81))$$

3. Dado $log2 \approx 0,30$ e $log3 \approx 0,48$, determine:

a) $log0,003$

b) $log1,44$

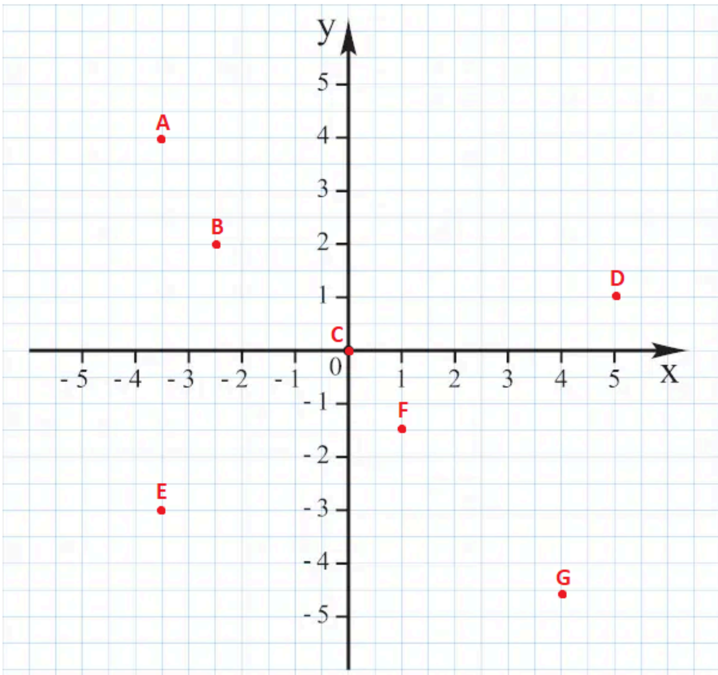
c) $log\sqrt[3]{2700}$

4. $log8(m) = \frac{k}{3}$

5. $log9(20) = \frac{a+1}{2 \cdot b}$

Plano Cartesiano e 3D

1. Localize os pontos A, B, C, D, E, F e G a seguir, indicando o quadrante em que se encontram.



2. Em um plano cartesiano, foram marcados os pontos A (8, -17), B (27, 43), C (-4, 13). Qual o quadrante que não possui nenhum ponto?

3. Que superfícies de R^3 são representadas pelas equações:

a) x = 7;

b) z = -3;

c) y = 14;

d) y = x;

e) z = 2x.

4. Considere os pontos no espaço tridimensional: A (1, 0, 4), B (3, 6, 4), C (3, 4, -10).

a) Qual o ponto D de modo que A, B, C e D formam um paralelogramo?

b) Em qual octante estão localizados os pontos A, B, C e D?

Deixamos alguns exemplos para serem praticados:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

Equações de Retas

1. A equação da reta que tem coeficiente angular e linear, respectivamente, iguais a 2/3 e -1 é:

a) x + 3y - 5 = 0

b) 2x - 3y - 3 = 0

c) 2x - 3y + 3 = 0

d) y = - x + 2/3

e) y = 2/3x

2. Para que valores de a as retas r1 de equação *2x + (a -2)y - 5 = 0* e r2 de equação *4x + ay - 1 = 0* são concorrentes?

a) a = 4

b) a ≠ 4

c) a = - 4

d) a ≠ - 4

e) a ≠ 5

3. A reta que passa pela origem e pelo ponto médio do segmento AB com A=(0,3) e B=(5,0) tem qual coeficiente angular?

A) 35

B) 25

C) 32

D) 1

Limite

1. Resolva os limites abaixo

a) $\lim_{x \to 2} x^2 - 7$

b) $\lim_{x \to -1} x^3 + 1$

PET CIVIL ufscar

PET Engenharia Civil
Departamento de Engenharia Civil
Universidade Federal de São Carlos

Rod. Washington Luiz (SP-310)
km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589

c) $\lim\limits_{x \to 0} 4x^3 + 3x - 2$

d) $\lim\limits_{x \to -\frac{8}{3}} \frac{x}{|x|}$

2. Sendo $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, calcule, caso exista, o $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

3. Sendo $f(x) = \frac{3}{x}\left(\frac{1}{5+x} - \frac{1}{5-x}\right)$, calcule, caso exista, o $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

4. Sendo $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$, calcule, caso exista, o $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

5. Sendo $f(x) = \frac{9-x}{\sqrt{x}-3}$, calcule, caso exista, o $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$.

6. Resolva os limites abaixo, caso existam.

a) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 + x - 6$

b) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - x + 6$

7. Resolva os limites laterais abaixo:

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} x^2 - 1$

b) Sendo f(x) = (Inserir chave grande) x + 3, se x < 0; 1, se x = 0; x^3, se x > 0, calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

8. Verifique a existência dos limites apresentados usando limites laterais:

a) Sendo f(x) = (Inserir chave grande) cos(x), se x < π; sen(x), se x > π, calcule $\lim\limits_{x \to \pi} f(x)$

b) Sendo f(x) = (Inserir chave grande) x^2, se x < 2; x + 1, se x = 2; $-x^2 + 2x + 4$, se x > 2, calcule $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

9. Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^6\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^6}\right)}}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1}$

10. Sendo $f(x) = \frac{x^3-x^2+7}{2x^4-3x^2+5}$, calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

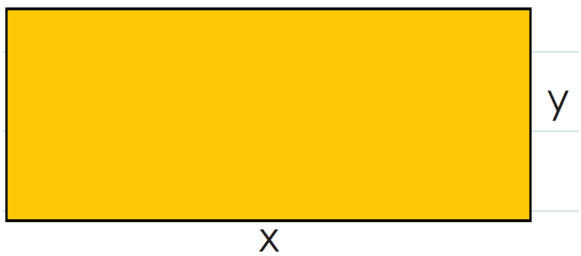
Derivada

1. Se a posição de uma partícula é dada por $x = 4 - 12t + 3t^2 + 3t^3$ (onde t está em segundos e x em metros) qual a velocidade da partícula em t=1s? Escreva a equação da aceleração instantânea da partícula.

2. Determine as coordenadas do ponto máximo ou mínimo da função $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ utilizando derivada.

3. Calcule $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3+x^2-5x-3}{x^3-7x^2+11x-5}$.

4. Projete um jardim retangular de área máxima protegido por uma cerca, sabendo que temos 100m de cerca. Determine os lados do jardim em metros e a área máxima.



Integrais

1. Integre as seguintes funções:

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310) KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

a) $f(x) = x^6 + x^{12} + x^{24} - x^{48}$

b) $g(x) = 5 + x^4 - x^{14}$

c) $h(x) = 3x^4 - \frac{x^{12}}{4}$

d) $i(x) = sen(x) - cos(x) + x^4$

GABARITO

Inequações

1. a) Solução parte 1: $x \leq 2$; Solução parte 2: $x >- 3$; Solução parte 3: $x > 2$. Portando, solução final: $S = \{ \}$

b) $S = \{x \in R \,|\, 3 \leq x < 6\}$

c) $S = \{x \in R \,|\, 0 \leq x \leq 2\}$

2. a) $S = \{x \in R \,|\, x \leq \frac{1}{2} ou\, x \geq 2\}$

b) $S = \{x \in R \,|\, -1 < x < \frac{2}{3} ou\, x > 3\}$

c) $S = \{x \in R \,|\, -2 \leq x \leq 1\, ou\, x \geq 2\}$

3. a) $S = \{x \in R \,|\, -\frac{2}{5} \leq x < 1\}$

b) $S = \{x \in R \,|\, -4 < x \leq 2\, ou\, 4 < x \leq 6\}$

4. $S = \{x \in R \,|\, -3 \leq x <- 2\, ou\, 1 < x \leq 3\}$

Fatoração

ROD. WASHINGTON LUIZ (SP-310)
KM 235 - SÃO CARLOS - SP
WWW.FACEBOOK.COM/PETCIVIL.UFSCAR/
PETCIVILUFSCAR@GMAIL.COM
(16) 3306-6589

1.a) $5ab^2(1 + 2a - 3a^2b^2)$

b) $(2a + b)(c - d)$

c) $4x^2(x - 2y)^2$

d) $5(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

2. $ab = 30$

3. $y = \frac{(x+3)}{(x-3)}$

4. $y = x + 2$

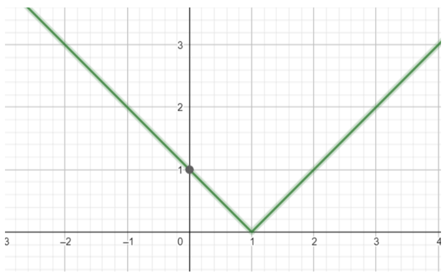
Módulo

1.a) $S = \{-3, 3\}$

b) $S = \{1, 11\}$

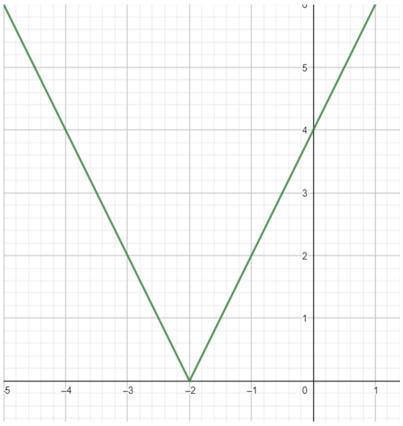
c) $S = \{7\}$

2.



3. b

4.



5. Soma = 4

6. Soma = 4

7. $S = \{x\epsilon(Reais)/x <- 2 \ ou \ x > 2/3\}$

Logaritmo

1. a) $log2(128) = 7$

b) $log\sqrt{3}(27) = 6$

c) $log\frac{1}{25}(5\sqrt{5}) =- \frac{3}{4}$

d) $log25(0,005) = \frac{1}{2}$

2. $A = 2$

3. a) $log0,003 \approx- 2,52$

b) $log1,44 \approx 0,16$

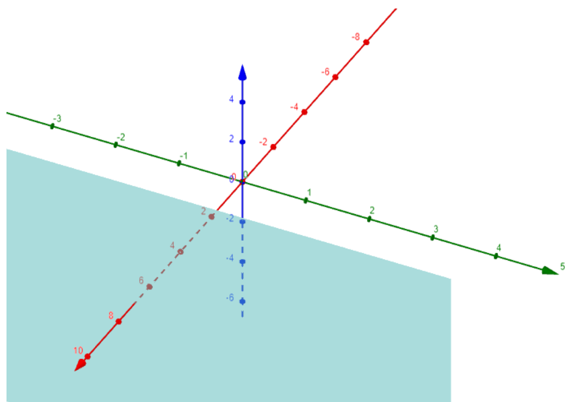
c) $log\sqrt[3]{2700} \approx 1,48$

Plano Cartesiano e 3D

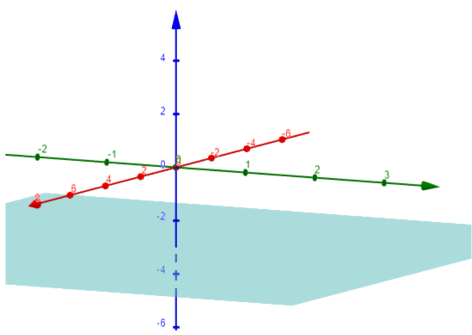
1. A (-3,5 , 4), 2°Quadrante; B (-2,5 , 2), 2°Quadrante; C (0,0), Origem; D (5 , 1), 1°Quadrante; E (-3,5 , -3), 3°Quadrante; F (1 , -1,5), 4°Quadrante; G (4 , -4,5), 4°Quadrante.

2. 3° Quadrante.

3. a) x = 7



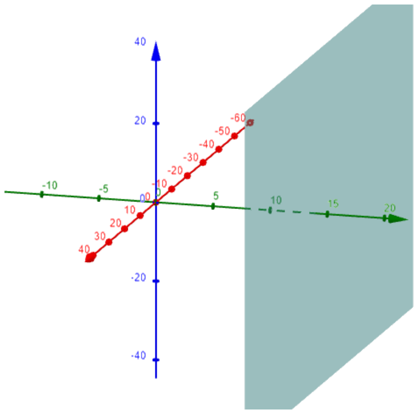
b) z = -3



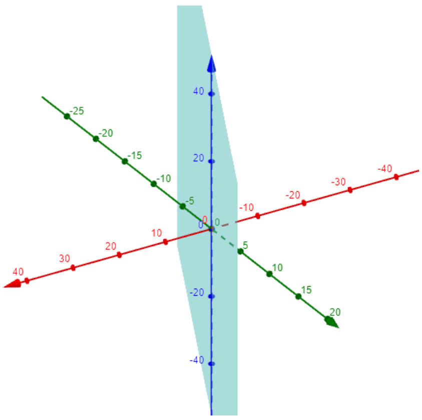
PET Engenharia Civil
Departamento de Engenharia Civil
Universidade Federal de São Carlos

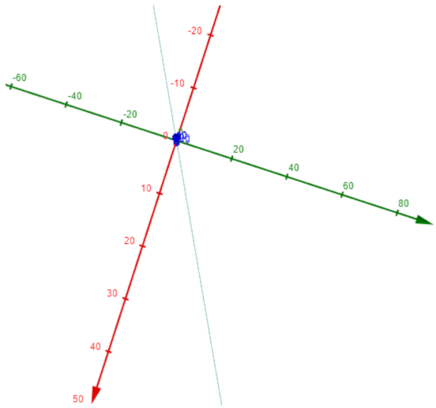
Rod. Washington Luiz (SP-310)
km 235 - São Carlos - SP
www.facebook.com/PETcivil.ufscar/
petcivilufscar@gmail.com
(16) 3306-6589

c) y = 14

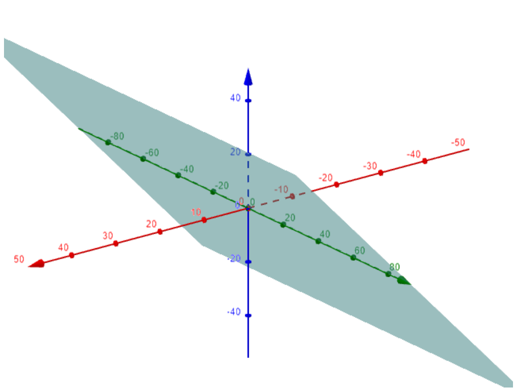


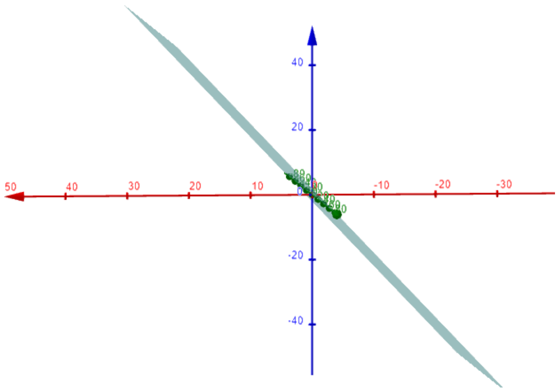
d) y = x





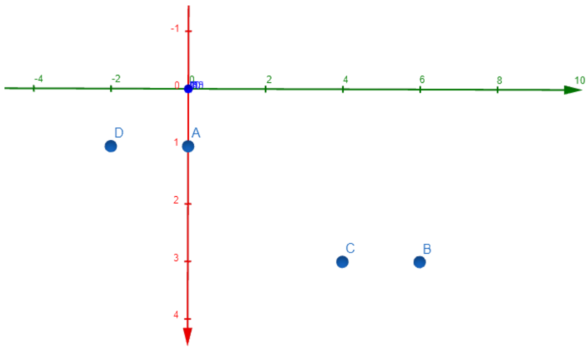
e) z = 2x

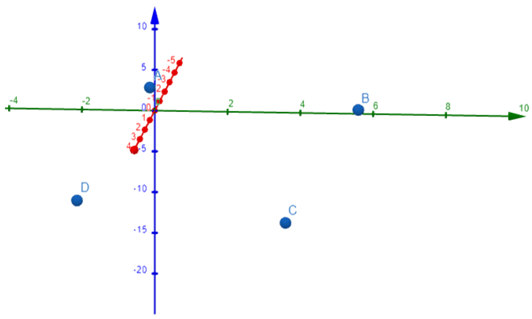




4. a) D (1, -2, -10)

b) A: plano xz; B: 1° Octante; C: 5° Octante; D: 8° Octante.





Equações de Retas

1. B
2. B
3. A

Limite

1.a) - 3

1.b) 0

1.c) - 2

1.d) - 1

2. 2

3. - 6 / 25

4. O limite não existe

5. - 6

6.a) 0

6.b) 8

7.a) 3

7.b) 0 e 3 (respectivamente)

8.a) O limite não existe

8.b) 4

9.a) 0

9.b)

10. 0

Derivada

1. $v(1) = 3m/s$; $a(t) = 6 + 18t$.

2. $\left(\frac{5}{8}; \frac{9}{16}\right)$

3. ∞

4. A = 625m^2; x = y = 25m

Integrais

1. a) $\frac{x^7}{7} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{25}}{25} - \frac{x^{49}}{49} + c$

b) $5x + \frac{x^5}{5} - \frac{x^{15}}{15} + c$

c) $\frac{3}{5}x^5 - \frac{x^{13}}{52} + c$

d) $-\cos(x) - sen(x) + \frac{x^5}{5} + c$